NOTE DEL CORSO di ISTITUZIONI DI MATEMATICHE.
Corsi di Laurea in Scienze Naturali - Ambientali A.A.2003-2004

§1.VETTORI, PRODOTTO SCALARE, PRODOTTO VETTORIALE

Riassunto sui vettori. Consideriamo lo spazio fisico e fissiamo un riferimento cartesiano. Ciò vuol dire fissare tre assi cartesiani ortogonali passanti per un punto comune O e con la stessa unità di misura. Il punto comune O è detto *origine.* Ad ogni punto P dello spazio possiamo ora associare una terna di coordinate (x, y, z) e otteniamo in tal modo un'identificazione dello spazio fisico con $\mathbb{R}^3$.
In $\mathbb{R}^3$ c'è un'operazione di *somma di terne*,

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z'),$$

e di prodotto di una terna per uno scalare $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)\,.$$

Le proprietà di queste due operazioni fra terne sono richiamate nelle dispense.

Abbiamo poi considerato i vettori geometrici centrati nell'origine $O = (0, 0, 0)$; per definizione questi sono i segmenti orientati con origine in O. Fissato un punto P, questo può essere riguardato come punto oppure come secondo estremo di un segmento orientato con origine in O; scriviamo in tal caso $\overrightarrow{OP}$.

Abbiamo visto che c'è un'operazione di somma fra i vettori geometrici, data dalla regola del parallelogramma, ed un'operazione di prodotto per uno scalare $\alpha \in \mathbb{R}$. Abbiamo poi osservato che se $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$ sono due vettori geometrici, con $P = (x, y, z)$ e $Q = (x', y', z')$ allora la somma definita dalla regola del parallelogramma coincide con la somma algebrica delle coordinate; più precisamente,

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}$$

con $R = (x + x', y + y', z + z')$. Analogamente, se $\alpha \in \mathbb{R}$ allora

$$\alpha\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS}$$

con $S = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$. Abbiamo in tal modo dato un'identificazione fra l'insieme dei vettori geometrici dotato delle sue due operazioni di somma e prodotto per uno scalare, con $\mathbb{R}^3$ dotato delle 2 operazioni di somma di terne e prodotto di una terna per uno scalare. Una terna è anche detta un vettore di $\mathbb{R}^3$.

D'ora in poi identificheremo liberamente vettori geometrici e vettori di $\mathbb{R}^3$.

Base di $\mathbb{R}^3$. Osserviamo che nello spazio $\mathbb{R}^3$ ogni vettore (x, y, z) può essere espresso come

$$(x, y, z) = (x, 0, 0,) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = x\,(1, 0, 0) + y\,(0, 1, 0) + z\,(0, 0, 1).$$

Allora, posto

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \quad \vec{j} = (0, 1, 0), \quad \vec{k} = (0, 0, 1),$$

si ottiene

$$(x, y, z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k},$$

e si dice che la terna di vettori $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ costituisce una **base** in $\mathbb{R}^3$. Nel seguito useremo tale possibile rappresentazione dei vettori. Se P è il punto delle spazio di coordinate (x, y, z) allora è anche vero, per l'identificazione spiegata sopra, che

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,.$$

Prodotto scalare fra vettori geometrici. Consideriamo due vettori geometrici $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Denotiamo la loro lunghezza in quanto segmenti orientati con i simboli $\|\vec{v}\|$ e $\|\vec{w}\|$ rispettivamente. I due segmenti orientati (che hanno origine comune in O) determinano un angolo $\widehat{\vec{v}\,\vec{w}}$ compreso fra 0 e π. Il prodotto scalare di $\vec{v}$ e $\vec{w}$, denotato $\vec{v} \cdot \vec{w}$, è per definizione il numero

$$\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\| \cos \widehat{\vec{v}\,\vec{w}}\,.$$

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà evidenti:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0\,, \quad \vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

Si può anche dimostrare (ma non è del tutto ovvio) che

$$(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u}\,.$$

Utilizzando queste proprietà ed il fatto (facile) che

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$
$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

abbiamo verificato a lezione che se $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$ sono due vettori geometrici, con $P = (x, y, z)$ e $Q = (x', y', z')$ allora

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = xx' + yy' + zz'\,.$$

In particolare

$$\|\overrightarrow{OP}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2\,.$$

Dato che $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ scopriamo anche che

$$\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0\,.$$

Parallelamente, possiamo procedere algebricamente e definire il prodotto scalare tra due vettori di $\mathbb{R}^3$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, ispirandoci alla formula scritta sopra e ponendo quindi per definizione

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3\,.$$

È ovvio che questa definizione è compatibile con l'identificazione fra vettori geometrici $\overrightarrow{OP}$ e le terne di $\mathbb{R}^3$. In particolare

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0\,.$$

Questa definizione può essere generalizzata ad $\mathbb{R}^n$; vedere le dispense.

Prodotto vettoriale. Continuiamo ad identificare i vettori geometrici con le terne di numeri reali. Dati due vettori $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, il loro prodotto vettoriale è un nuovo vettore $\vec{h}$. Prima di dare esplicitamente la definizione di $\vec{h}$, osserviamo che scriveremo

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{h} \quad \text{e leggeremo "} v \,\text{vettor}\, w = h \text{"}.$$

Definizione. Per dare un vettore geometrico occorre darne (1) la lunghezza, (2) la direzione, e (3) il verso.

1) Sia $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{h}$. Allora per definizione $\|\vec{h}\| = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\||\sin \widehat{\vec{v}\,\vec{w}}| = \text{Area}(P)$, dove P è il parallelogramma con lati $\vec{v}$ e $\vec{w}$. $\vec{v} \wedge \vec{w}$ è il vettore nullo se e solo se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono paralleli.

2) Per la direzione: $\vec{v} \wedge \vec{w}$ è ortogonale a entrambi i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

3) Il verso di $\vec{h}$ è tale che, ponendoci sul piano individuato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$, dal lato di $\vec{h}$, la rotazione che ci porta da $\vec{v}$ a $\vec{w}$ (secondo l'angolo minore), sia antioraria. Questo si esprime dicendo che $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{h}$ costituiscono una terna destrorsa (così come i vettori $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

Osserviamo che si ha: $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$. Analogamente $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$, $\quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$. Inoltre abbiamo già osservato che

$$\vec{v} \wedge \vec{v} = (0,0,0)\,, \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$$

Il prodotto vettoriale, a differenza di quello scalare, non gode della proprietà commutativa e si ha per ogni coppia di vettori:

$$(\textit{anticommutatività}) \qquad \vec{v} \wedge \vec{w} = -\vec{w} \wedge \vec{v}\,.$$

Valgono inoltre le seguenti proprietà distributive

$$(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) \wedge \vec{z} = \lambda(\vec{v} \wedge \vec{z}) + \mu(\vec{w} \wedge \vec{z})\,, \quad \vec{z} \wedge (\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda(\vec{z} \wedge \vec{v}) + \mu(\vec{z} \wedge \vec{w})\,.$$

Espressione in coordinate di $\vec{v} \wedge \vec{w}$. È possibile verificare, utilizzando le informazioni date dopo la definizione di prodotto vettoriale, che

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \left(\det\begin{pmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{pmatrix}\right)\vec{i} - \left(\det\begin{pmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{pmatrix}\right)\vec{j} + \left(\det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}\right)\vec{k}$$

Quindi le coordinate di $\vec{v} \wedge \vec{w}$ sono i determinanti di opportune matrici 2×2. Possiamo anche scrivere

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}\,;$$

pur essendo impropria la scrittura (poichè una riga della matrice è costituita da vettori invece che scalari), l'ultima formula fornisce una facile memorizzazione del calcolo delle coordinate di $\vec{v} \wedge \vec{w}$.

ESEMPIO: Se $\vec{v} = (1,2,3)$ e $\vec{w} = (4,5,6)$ allora $\vec{v} \wedge \vec{w} = -3\,\vec{i} + 6\,\vec{j} - 3\,\vec{k} = (-3,6,-3)$.