ALGEBRA I: NONA ESERCITAZIONE
31 maggio 2011

Esercizio 1. Calcolare la struttura di $\mathbb{Z}[i]/(3+4i)$ come $\mathbb{Z}$-modulo.

Suggerimento. Considerare l'isomorfismo di $\mathbb{Z}$-moduli $\phi : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}^2$ definito da $\phi(1) = (1,0)$ e $\phi(i) = (0,1)$ ed identificare l'ideale generato da $3+4i$ con l'immagine della matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Sia $a+bi$ un intero di Gauss, si denoti $d = \mathrm{MCD}(a,b)$ e $D = (a^2+b^2)/d$. Mostrare che esiste un isomorfismo di gruppi abeliani

$$\mathbb{Z}[i]/(a+bi) \simeq \mathbb{Z}/(d) \times \mathbb{Z}/(D).$$

Osservazione. In particolare, $\mathbb{Z}[i]/(a+bi)$ è un anello di cardinalità a^2+b^2.

Suggerimento. Generalizzare il suggerimento dell'esercizio precedente.

Esercizio 3. Sia A una matrice quadrata a coefficienti interi il cui determinante è privo di quadrati (vale a dire per cui non esistono interni n tali che n^2 divide $\det(A)$). Determinare la forma diagonale di A.

Esercizio 4. Mostrare che due vettori a coefficienti interi (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) si completano a una base di $\mathbb{Z}^3$ se e solo se il massimo comune divisore dei minori della matrice

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

è uno.

Esercizio 5. Sia A la matrice di un omomorfismo $\phi : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ tra due $\mathbb{Z}$-moduli liberi relativamente a due basi fissate.

i) Mostrare che ϕ è iniettivo se e solo se $\det(A) \neq 0$.

ii) Mostrare che ϕ è suriettivo se e solo se $|\det(A)| = 1$.

Osservazione. L'esercizio mostra che, mentre la suriettività implica l'iniettività, il viceversa è falso (a differenza degli spazi vettoriali di dimensione finita).

Esercizio 6. Ridurre la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 3 \\ 9 & 5 & 4 \\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

in forma diagonale mediante operazioni intere sulle righe e sulle colonne, determinando matrici intere Q e P tali che $A' = Q^{-1}AP$ è diagonale ed esplicitando le basi in partenza e in arrivo che rendono la trasformazione diagonale.