ALGEBRA I: SESTA ESERCITAZIONE
12 maggio 2011

Esercizio 1. Mostrare che i seguenti ideali non sono principali (dove $\mathbb{k}$ è un campo):

$$(2, x) \subset \mathbb{Z}[x], \qquad (x, y) \subset \mathbb{k}[x, y].$$

Esercizio 2. Sia $I \subset \mathbb{Z}$ un ideale. Mostare che I è primo se e solo se $I = (p)$ per qualche numero primo $p \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 3. Sia $\phi : A \to B$ un omomorfismo di anelli.

i) Mostrare che se $P \subset B$ è un ideale primo, allora $\phi^{-1}(P) \subset A$ è un ideale primo.

ii) Mostrare con un controesempio che se $P \subset B$ è un ideale massimale, allora non necessariamente $\phi^{-1}(P) \subset A$ è un ideale massimale.

Esercizio 4. (*Teorema cinese del resto*) Siano r e s due numeri interi coprimi. Mostrare che la proiezione

$$\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(r) \times \mathbb{Z}/(s).$$

induce un isomorfismo di anelli $\mathbb{Z}/(rs) \simeq \mathbb{Z}/(r) \times \mathbb{Z}/(s)$.

Esercizio 5. (*Teorema cinese del resto in anelli arbitrari*) Sia A un anello e siano $I, J \subset A$ due ideali (bilateri) tali che $I + J = A$. Mostrare che la proiezione

$$\phi : A \longrightarrow A/I \times A/J.$$

induce un isomorfismo di anelli $A/I \cap J \simeq A/I \times A/J$.

Definizione. Un anello si dice *locale* se possiede un unico ideale massimale.

Esercizio 6. Sia $p \in \mathbb{Z}$ un numero primo e si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ definito da

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \{a/b \ : \ a, b \in \mathbb{Z} \ \text{ e } \ p \text{ non divide } b\} :$$

tale sottoinsieme è detto la *localizzazione* di $\mathbb{Z}$ in p.

i) Mostare che $\mathbb{Z}_{(p)}$ è un sottoanello di $\mathbb{Q}$.

ii) Mostrare che il sottoinsieme $I = \big\{a/b \in \mathbb{Z}_{(p)} \ : \ p \text{ divide } a\big\}$ è un ideale di $\mathbb{Z}_{(p)}$.

iii) Mostrare che l'insieme degli invertibili di $\mathbb{Z}_{(p)}$ coincide con $\mathbb{Z}_{(p)} \smallsetminus I$.

iv) Mostrare che I è l'unico ideale massimale di $\mathbb{Z}_{(p)}$.

Esercizio 7. Sia A un dominio d'integrità con campo dei quozienti Q e sia $P \subset A$ un ideale primo. Si consideri il sottoinsieme di Q definito da

$$A_P = \{a/b \ : \ a, b \in A \ \text{ e } \ b \notin P\} :$$

tale sottoinsieme è detto la *localizzazione* di A in P.

i) Mostare che A_P è un sottoanello di Q.

ii) Mostrare che il sottoinsieme $I = \{a/b \in A_P \ : \ a \in P\}$ è un ideale di A_P.

iii) Mostrare che l'insieme degli invertibili di A_P coincide con $A \smallsetminus I$.

iv) Mostrare che I è l'unico ideale massimale di A_P.