ALGEBRA I: DECIMA ESERCITAZIONE
6 giugno 2011

Esercizio 1.

i) Elencare tutti i possibili gruppi abeliani di cardinalità 140 a meno di isomorfismo.

ii) Elencare tutti i possibili gruppi abeliani di cardinalità 2310 a meno di isomorfismo.

Esercizio 2. Se $M \subset V$ sono $\mathbb{Z}$-moduli, si definisca l'*indice* di M in V (denotato con $[V : M]$) come la cardinalità del modulo quoziente V/M.

i) Sia $M \subset \mathbb{Z}^n$ uno $\mathbb{Z}$-sottomodulo di rango n con base $v_1, \dots, v_n$ e si consideri il parallelogramma $P \subset \mathbb{R}^n$ generato da $v_1, \dots, v_n$:

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \ : \ a_i \in \mathbb{R},\ 0 \leq a_i < 1 \right\}.$$

Mostare che l'indice di M in $\mathbb{Z}^n$ coincide con la cardinalità dell'intersezione $P \cap \mathbb{Z}^n$.

ii) Sia A una matrice intera quadrata di ordine n con determinante diverso da zero. Mostrare che l'indice dell'immagine di A in $\mathbb{Z}^n$ coincide con il modulo del determinante di A.

Esercizio 3. Mostrare che il concetto di $\mathbb{Z}[i]$-modulo è equivalente al seguente:

- gruppo abeliano M dotato di un endomorfismo $\phi : M \longrightarrow M$ tale che $\phi^2 = -\mathrm{id}$.

Esercizio 4. Mostrare che il gruppo abeliano moltiplicativo $\mathbb{Q}^+$ dei numeri razionali positivi è uno $\mathbb{Z}$-modulo libero e determinarne una base.

Esercizio 5. Sia R un anello commutativo unitario e sia $I \subset R$ un ideale. Confutare o dimostrare le seguenti affermazioni:

i) Il quoziente R/I è un R-modulo libero se e solo se $I = R$ oppure $I = 0$.

ii) L'ideale I è un R-modulo libero se e solo se è principale.

Esercizio 6. Dimostrare che un anello commutativo unitario R tale che ogni modulo finitamente generato è libero è un campo.