**Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2023-24.**
**Prof. P. Piazza**
**Note sul teorema spettrale.**

Sia $V$ uno spazio vettoriale reale e supponiamo che sia definito in $V$ un prodotto scalare definito positivo $<\,,\,>$. La coppia $(V,<\,,\,>)$ è, per definizione, uno spazio vettoriale metrico.

Un esempio è $V = \mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare canonico $<\,,\,>_{\text{can}}$. Quindi, per definizione,

$$< \underline{x}, \underline{y} >_{\text{can}} := \underline{y}^T \cdot \underline{x}$$

dove a destra dell'uguaglianza c'è il prodotto righe per colonne. Denotiamo brevemente questo prodotto scalare tramite il simbolo $\bullet$. Quindi poniamo

$$\underline{x} \bullet \underline{y} = \underline{y}^T \cdot \underline{x}$$

Osserviamo che

$$\underline{y}^T \cdot \underline{x} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \underline{x}^T \cdot \underline{y} \tag{1}$$

come deve essere, dato che un prodotto scalare è simmetrico ( a sinistra c'è $\underline{x} \bullet \underline{y}$ e a destra c'è $\underline{y} \bullet \underline{x}$).

Torniamo a $(V,<\,,\,>)$ e sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una base **ortonormale** di $V$. Osserviamo che se $\underline{u} \in V$ ha coordinate $\underline{x}$ e $\underline{u}' \in V$ ha coordinate $\underline{x}'$ allora

$$< \underline{u}, \underline{u}' > = \underline{x} \bullet \underline{x}' \,. \tag{2}$$

Infatti

$$< \underline{u}, \underline{u}' > = < x_1 \underline{v}_1 + \cdots + x_n \underline{v}_n, x_1' \underline{v}_1 + \cdots + x_n' \underline{v}_n > ;$$

basterà ora utilizzare la bilinearità e le condizioni di ortonormalità:

$$< \underline{v}_i, \underline{v}_j > = 0 \;\text{ se }\; i \neq j \;; < \underline{v}_i, \underline{v}_i > = 1$$

per ottenere

$$< \underline{u}, \underline{u}' > = x_1 x_1' + \cdots + x_n x_n'$$

e a destra c'è proprio $\underline{x} \bullet \underline{x}'$ .
Detto a parole, *l'espressione in coordinate del prodotto scalare in $V$ rispetto ad una base ortonormale è uguale al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$.*

**Definizione.** Sia $T : V \to V$ un endomorfismo. Diremo che $T$ è simmetrico se

$$< T\underline{v}, \underline{w} > = < \underline{v}, T\underline{w} > \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$$

**Esempio 1.** Sia $V = \mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare canonico $\bullet$. Sia $A$ una matrice simmetrica. Allora $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $L_A(\underline{x}) := A \cdot \underline{x}$, è un operatore simmetrico. Infatti

$$L_A \underline{x} \bullet \underline{y} = \underline{y}^T \cdot (L_A \underline{x}) = \underline{y}^T \cdot (A \cdot \underline{x}) = (\underline{y}^T \cdot A) \cdot \underline{x} = (A \cdot \underline{y})^T \cdot \underline{x} = \underline{x} \bullet L_A \underline{y}$$

dove nella terza uguaglianza abbiamo applicato l'associatività e nella quarta uguaglianza abbiamo applicato la nota formula $(C \cdot D)^T = D^T \cdot C^T$ e l'ipotesi $A = A^T$.

Torniamo al caso generale di uno spazio vettoriale metrico $(V,<\,,\,>)$ di dimensione finita uguale ad $n$.

**Proposizione.** *$T$ è simmetrico se e solo se la matrice associata a $T$ in una base ortonormale, $A$, è simmetrica.*
**Dimostrazione.** Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ la nostra base ortonormale. Stiamo scegliendo questa base come base di partenza e base di arrivo. Quindi

$$A := M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)\,.$$

Sappiamo che se $\underline{v}$ ha coordinate $\underline{x}$ allora $T(\underline{v})$ ha coordinate $A\underline{x}$ e se $\underline{w}$ ha coordinate $\underline{y}$ allora $T(\underline{w})$ ha coordinate $A\underline{y}$, dove, con un piccolo abuso di notazione, scriviamo $A\underline{x}$, $A\underline{y}$ e non $A \cdot \underline{x}$ e $A \cdot \underline{y}$ [1].
$T$ simmetrico vuol dire che $< T\underline{v}, \underline{w} >=< \underline{v}, T\underline{w} > \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$, che per la (2) è equivalente a

$$A\underline{x} \bullet \underline{y} = \underline{x} \bullet A\underline{y} \;\; \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n\,. \tag{3}$$

Ma a sinistra di (3) c' è, per simmetria, $\underline{y} \bullet A\underline{x}$, che è uguale per definizione a $(A\underline{x})^T \cdot \underline{y}$ che è uguale a sua volta a $\underline{x}^T A^T \underline{y}$. Invece a destra di (3) c' è, per simmetria, $A\underline{y} \bullet \underline{x}$ che è uguale a $\underline{x}^T A\underline{y}$. Quindi $T$ è simmetrico se e solo

$$\underline{x}^T A^T \underline{y} = \underline{x}^T A\underline{y} \;\; \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

e questo è vero se e solo se $A = A^T$ dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la seguente
**Osservazione.** Se $A$ e $B$ sono due matrici in $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, allora

$$\underline{y}^T A\underline{x} = \underline{y}^T B\underline{x} \;\; \forall \underline{x}, \forall \underline{y} \in \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad A = B\,.$$

In una direzione ($\Leftarrow$) è ovvio; per l'altra basta scegliere $\underline{y} = \underline{e}_j$ e $\underline{x} = \underline{e}_k$, con $\underline{e}_i$ l' $i$-mo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$. Con questa particolare scelta è facile verificare che $\underline{y}^T A\underline{x}$ dà il coefficiente al posto $(jk)$ della matrice $A$; dall'uguaglianza $\underline{x}^T A\underline{y} = \underline{x}^T B\underline{y}$, con $\underline{y} = \underline{e}_j$ e $\underline{x} = \underline{e}_k$, possiamo concludere che $A$ e $B$ hanno i coefficienti al posto $(jk)$ uguali; dato che $k$ e $j$ erano arbitrari, possiamo concludere che le matrici sono uguali, $A = B$. **Fine osservazione.**

Sappiano che per un operatore lineare $T : V \to V$ autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti. Per gli operatori simmetrici si ha una proprietà più forte:

**Proposizione 2.** *Sia $T$ simmetrico. Allora autovettori associati ad autovalori distinti sono* **ortogonali**.
**Dimostrazione.** Siano $\lambda$ e $\mu$ due autovalori, con $\lambda \neq \mu$. Quindi uno dei due autovalori è diverso da zero, sia esso $\lambda$. Siano $\underline{v}_\lambda$ e $\underline{v}_\mu$ due autovettori associati rispettivamente a $\lambda$ e $\mu$. Allora si ha, utilizzando l'ipotesi $T$ simmetrico,

$$\langle \underline{v}_\lambda, \underline{v}_\mu \rangle = \frac{1}{\lambda}\langle \lambda\underline{v}_\lambda, \underline{v}_\mu \rangle = \frac{1}{\lambda}\langle T(\underline{v}_\lambda), \underline{v}_\mu \rangle = \frac{1}{\lambda}\langle \underline{v}_\lambda, T(\underline{v}_\mu) \rangle = \frac{1}{\lambda}\langle \underline{v}_\lambda, \mu\underline{v}_\mu \rangle = \frac{\mu}{\lambda}\langle \underline{v}_\lambda, \underline{v}_\mu \rangle$$

e quindi

$$(1 - \frac{\mu}{\lambda})\langle \underline{v}_\lambda, \underline{v}_\mu \rangle = 0\,.$$

Dato che per ipotesi $(1 - \frac{\mu}{\lambda}) \neq 0$ deve essere $\langle \underline{v}_\lambda, \underline{v}_\mu \rangle = 0$.
**Teorema spettrale per operatori simmetrici.**
*Sia $(V, < , >)$ uno spazio vettoriale metrico di dimensione finita. Sia $T : V \to V$*

[1] D'ora in avanti non utilizziamo la notazione $A \cdot B$ per il prodotto righe per colonne, ma scriviamo semplicemente $AB$.

*un operatore simmetrico. Allora esiste una base ortonormale di $V$ costituita da autovettori di $T$.*

**Dimostrazione.** Per induzione su $n = \dim V$. Per $n = 1$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo vero il teorema per spazi vettoriali metrici di dimensione $n-1$ e dimostriamolo per quelli di dimensione $n$.
Fissiamo una qualsiasi base ortonormale di $V$; abbiamo visto (Proposizione 1) che la matrice associata a $T$ in questa base è simmetrica. Vale il seguente

**Lemma.** *Le radici del polinomio caratteristico associato ad una matrice reale simmetrica $A$ sono tutte reali.*

Dimostreremo fra poco questo Lemma; per ora lo assumiamo come vero e lo applichiamo al polinomio caratteristico di $T$, scritto rispetto alla base ortonormale fissata. Sappiamo dal Lemma che esiste un autovalore reale, sia esso $\lambda$; sia $\underline{e}_1$ un autovettore associato a tale autovalore. Possiamo assumere che $||\underline{e}_1|| = 1$ perché se cosi' non fosse possiamo sempre normalizzare l'autovettore (ottenendo nuovamente un autovettore, perché gli autospazi sono, appunto, sottospazi). Consideriamo ora $W = (\mathbb{R}\underline{e}_1)^\perp$. *Osservazione fondamentale:* il sottospazio $W$ è invariante per $T$; questo vuol dire, per definizione, che $T(W)$ è contenuto in $W$. [2]. Dimostriamo questa proprietà fondamentale:
sia $\underline{w} \in W$; dobbiamo verificare che $T\underline{w} \in W$ e cioè che $< T\underline{w}, \underline{e}_1 >= 0$; ma $< T\underline{w}, \underline{e}_1 >=< \underline{w}, T\underline{e}_1 >$ per l'ipotesi che $T$ è simmetrico e $T\underline{e}_1 = \lambda\underline{e}_1$ perché $\underline{e}_1$ è un autovettore associato a $\lambda$; quindi

$$< T\underline{w}, \underline{e}_1 >=< \underline{w}, T\underline{e}_1 >=< \underline{w}, \lambda\underline{e}_1 >= \lambda < \underline{w}, \underline{e}_1 >$$

che è uguale a zero dato che $\underline{w} \in W = (\mathbb{R}\underline{e}_1)^\perp$. Quindi $W$ è invariante.
Ha senso quindi considerare la restrizione di $T$ a questo sottospazio

$$T|_W : W \to W \, ;$$

questo è quindi un endomorfismo dello spazio vettoriale $W$ ed è bene notare che $W$ ha dimensione $n-1$ con $n = \dim V$. Il prodotto scalare $<\, , >$ definisce per restrizione un'applicazione $W \times W \to \mathbb{R}$ che è ovviamente ancora bilineare, simmetrica e definita positiva. $W$ è quindi esso stesso uno spazio vettoriale con prodotto scalare definito positivo, cioè uno spazio vettoriale metrico [3]; l'operatore $T|_W : W \to W$ è ovviamente simmetrico rispetto a questo prodotto scalare in $W$ [4]. Ma $W$ ha dimensione $n-1$ e quindi, per ipotesi induttiva, $W$ ammette una base ortonormale $\underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ costituita da autovettori per $T|_W$; è ora chiaro che $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ è una base ortonormale di $V$ costituita da autovettori per $T$. Il teorema è dimostrato.

**Dimostrazione del Lemma.** Consideriamo $P_A(\lambda)$, un polinomio di grado $n$ in $\lambda$ a coefficienti reali. Per il teorema fondamentale dell'algebra $P_A(\lambda)$ ammette $n$ radici complesse contate con la loro molteplicità. Sia $\lambda$ una tale radice complessa; dobbiamo dimostrare che $\lambda \in \mathbb{R}$ o, equivalentemente, che $\lambda$ coincide con il suo complesso coniugato, in formule $\lambda = \overline{\lambda}$. Consideriamo $L_A^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, l'operatore lineare che manda $z \in \mathbb{C}^n$ in $Az \in \mathbb{C}^n$ (in $\mathbb{C}^n$, a causa del coniugio, non sottolineamo

---

[2]Questa è una proprietà particolare del sottospazio; in generale l'immagine tramite $T$ di un sottospazio $W$ è un sottospazio diverso da $W$ (pensate ad una rotazione $T$ di $\pi/2$ in $\mathbb{R}^2$ e a $W$ uguale a una qualsiasi retta)

[3]ciò è vero per ogni sottospazio di $V$

[4]la formula $< T\underline{v}\,\underline{w} >=< \underline{v}, T\underline{w} >$ è verificata *per ogni* $\underline{v}, \underline{w} \in V$, in particolare per i vettori di $W$ !

le n-ple).
Il polinomio caratteristico di questo endomorfismo è ovviamente ancora $P_A(\lambda)$. Sappiamo allora che esiste un autovettore $\zeta \in \mathbb{C}^n$, $\zeta \neq \underline{0}$, associato alla radice $\lambda$ (perché $\lambda$ è un autovalore per $L_A^{\mathbb{C}}$ essendo una radice del polinomio caratteristico di $L_A^{\mathbb{C}}$). Quindi $L_A^{\mathbb{C}}\zeta = \lambda\zeta$ che riscriviamo esplicitamente come

$$A \begin{vmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{vmatrix} \tag{4}$$

Prendiamo ora il complesso coniugato di ambo i membri; dato che $A$ è reale otteniamo

$$A \begin{vmatrix} \overline{\zeta_1} \\ \overline{\zeta_2} \\ \vdots \\ \overline{\zeta_n} \end{vmatrix} = \overline{\lambda} \begin{vmatrix} \overline{\zeta_1} \\ \overline{\zeta_2} \\ \vdots \\ \overline{\zeta_n} \end{vmatrix} \tag{5}$$

Consideriamo ora lo scalare

$$\begin{vmatrix} \overline{\zeta_1} & \overline{\zeta_2} & \dots & \overline{\zeta_n} \end{vmatrix} A \begin{vmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{vmatrix} \tag{6}$$

e riscriviamolo in due modi diversi utilizzando l'associatività del prodotto righe per colonne. Primo modo: utilizziamo (4) e riscriviamo (6) come

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \overline{\zeta_1} & \overline{\zeta_2} & \dots & \overline{\zeta_n} \end{vmatrix} (A \begin{vmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{vmatrix}) &= \begin{vmatrix} \overline{\zeta_1} & \overline{\zeta_2} & \dots & \overline{\zeta_n} \end{vmatrix} (\lambda \begin{vmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{vmatrix}) \\ &= \lambda(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + \dots + |\zeta_n|^2) \end{aligned} \tag{7}$$

perché se $z = a + ib \in \mathbb{C}$ allora $\overline{z}z = a^2 + b^2 := |z|^2$.
Secondo modo: utilizziamo (5), e l'ipotesi $A = A^t$ per riscrivere (6) come

$$\begin{aligned} (\begin{vmatrix} \overline{\zeta_1} & \overline{\zeta_2} & \dots & \overline{\zeta_n} \end{vmatrix} A) \begin{vmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{vmatrix} &= (A \begin{vmatrix} \overline{\zeta_1} \\ \overline{\zeta_2} \\ \vdots \\ \overline{\zeta_n} \end{vmatrix})^t \begin{vmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{vmatrix} \\ = (\overline{\lambda} \begin{vmatrix} \overline{\zeta_1} \\ \overline{\zeta_2} \\ \vdots \\ \overline{\zeta_n} \end{vmatrix})^t \begin{vmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{vmatrix} &= \overline{\lambda}(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + \dots + |\zeta_n|^2) \end{aligned} \tag{8}$$

Eguagliando i membri a destra otteniamo

$$\lambda(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + \dots + |\zeta_n|^2) = \overline{\lambda}(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + \dots + |\zeta_n|^2)$$

e dato che $|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + \cdots + |\zeta_n|^2 \neq 0$ abbiamo $\lambda = \overline{\lambda}$ che è quello che dovevamo dimostrare.
**Fine dimostrazione Lemma.**
**Fine dimostrazione Teorema.**

**Osservazione (facoltativa).** La definizione di operatore simmetrico è molto generale e può essere data anche per spazi vettoriali metrici di dimensione infinita. Vediamo un esempio. Sia $V$ lo spazio vettoriale delle funzioni reali $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infinitamente derivabili e periodiche di periodo $2\pi$ (tali cioè che $f(x) = f(x + 2\pi)$ $\forall x \in \mathbb{R}$). Sia $<,>$ l'applicazione da $V \times V \to \mathbb{R}$ definita da

$$< f, g >= \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

Per le proprietà dell'integrale quest'applicazione è bilineare; inoltre è ovviamente simmetrica ed è definita positiva perché se

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)dx = 0$$

allora $f^2$, e quindi $f$, è la funzione nulla [5] . Essa definisce quindi un prodotto scalare definito positivo in $V$. Consideriamo l'operatore $T$ definito da

$$Tf = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

In parole $T$ associa ad ogni funzione la sua derivata seconda. Innanzitutto $T$ è lineare (per le proprietà della derivata); inoltre è ben definito come operatore lineare da $V$ **in** $V$ (perché la derivata di una funzione periodica è a sua volta periodica). Infine $T$ **è simmetrico**; lo verifichiamo utilizzando la formula di integrazione per parti e l'ipotesi di periodicità. Per definizione

$$< Tf, g >= \int_0^{2\pi} \frac{d^2 f}{dx^2} g dx\,;$$

ora utilizziamo l'integrazione per parti ed otteniamo per il membro a destra:

$$-\int_0^{2\pi} \frac{df}{dx}\frac{dg}{dx}dx + (\frac{df}{dx})(2\pi)g(2\pi) - (\frac{df}{dx})(0)g(0)$$

Ma dall'ipotesi di periodicità otteniamo

$$(\frac{df}{dx})(2\pi)g(2\pi) - (\frac{df}{dx})(0)g(0) = 0$$

e quindi, in definitiva

$$< Tf, g >= -\int_0^{2\pi} \frac{df}{dx}\frac{dg}{dx}dx$$

Ma ora riapplichiamo l'integrazione per parti al membro a destra ottenendo infine

$$< Tf, g >= -\left(-\int_0^{2\pi} f\frac{d^2 g}{dx^2}dx\right) = \int_0^{2\pi} f\frac{d^2 g}{dx^2}dx =< f, Tg >$$

che era quello che dovevamo verificare.
L'operatore $T$ è un operatore studiatissimo; prende il nome di Laplaciano (in dimensione 1).

[5] qui si usa la continuità degli elementi di $V$; abbiamo visto l'argomento in classe.