Corso di Laurea Specialistica/Magistrale a.a. 2010-11

Topologia Algebrica

Secondo compito.

Esercizio 1. Sia M una varietà differenziabile *compatta* e sia ω una 1-forma mai nulla. Dimostrare che ω non può essere esatta.

Esercizio 2. Determinare la coomologia di de Rham di $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$.

Esercizio 3. Determinare l'omologia singolare (quindi a coefficienti in $\mathbb{Z}$) di $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$.

Esercizio 4. Calcolare l'omologia di $M := \mathbb{R}^n \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}$.

Esercizio 5. Sia M una varietà topologica di dimensione n ed $x \in M$. Calcolare $H_j(M, M \setminus \{x\})$

Esercizio 6. Dimostrare che se $f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$ è continua allora f ha almeno un punto fisso. (Potete utilizzare l'informazione che f si rileva ad un'applicazione continua $\tilde{f} : S^2 \to S^2$ tale che $\pi \circ \tilde{f} = f \circ \pi$ con $\pi : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ la mappa quoziente.)

Esercizio 7. Sia X uno spazio topologico. Diremo che $Y \subset X$ separa X se $X \setminus Y$ non è connesso per archi. Dimostrare che se A e B sono sottoinsiemi chiusi e disgiunti di S^n che non separano S^n, allora anche $A \cup B$ non separa S^n.

Esercizio 8. Calcolare la coomologia di un toro con 2 buchi (e cioè di una superficie orientabile di genere 2). Generalizzare ad un toro con n buchi (e cioè di una superficie orientabile di genere n, $n > 2$).