

Corso di Laurea Specialistica/Magistrale

Topologia Algebrica

Terzo compito.

Esercizio 1. Sia (E, π_E, X) un fibrato vettoriale e sia $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento di aperti banalizzanti per E . Rimane allora definito il cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$ delle funzioni di transizione

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$$

Sia ora (F, π_F, X) un secondo fibrato e supponiamo che gli aperti $\{U_\alpha\}$ siano banalizzanti anche per (F, π_F, X) . Sia $\{f_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R})\}$ il cociclo associato a questo secondo fibrato. In generale diremo che due cocicli $\{k_{\alpha\beta}\}$ e $\{h_{\alpha\beta}\}$ sono equivalenti se $\forall \alpha$ esiste $\lambda_\alpha : U_\alpha \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$ continuo tale che

$$k_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha h_{\alpha\beta} \lambda_\beta^{-1}.$$

Verificare che (E, π_E, X) è isomorfo a (F, π_F, X) se e solo se i rispettivi cocicli sono equivalenti.

Esercizio 2. Sia X uno spazio topologico e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento. Supponiamo che per ogni coppia $(\alpha, \beta) \in A \times A$ sia assegnata una funzione continua

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$$

e che questa collezione di mappe verifichi le seguenti proprietà:

- 1) $g_{\alpha\alpha}(m) = \text{Id}_{k \times k} \forall m \in U_\alpha$
- 2) $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$ in $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Sia \hat{E} l'unione disgiunta dei $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$; introduciamo una relazione d'equivalenza \mathcal{R} in \hat{E} come segue

$$U_\alpha \times \mathbb{R}^k \ni (x, e) \mathcal{R} (y, f) \in U_\beta \times \mathbb{R}^k \Leftrightarrow x = y \text{ e } f = g_{\alpha\beta}(x)e$$

Sia E lo spazio quoziente dotato della topologia indotta e sia $\pi : E \rightarrow X$ la mappa che associa alla classe d'equivalenza di (x, e) il punto $x \in X$. Verificare che (E, π, X) è un fibrato vettoriale (continuo) di rango k .

Esercizio 3. Siano (E, π_E, X) e (F, π_F, X) due fibrati vettoriali. Sia $\phi : E \rightarrow F$ un morfismo di fibrati e supponiamo che $\phi|_{E_x}$ sia un isomorfismo per ogni $x \in X$. Verificare che ϕ è allora un isomorfismo di fibrati (e cioè ϕ è anche un diffeomorfismo).

Esercizio 4 Sia E un fibrato reale (rispettiv. complesso) di rango k su M compatta.

4.1. Verificare in dettaglio che esiste sempre una metrica (rispett. metrica hermitiana) su E

4.2. Verificare che per un fibrato reale (risp. complesso) dotato di una metrica (risp. di una metrica hermitiana), il gruppo di struttura è riducibile a $O(k)$ (risp. a $U(k)$).