Corso di Laurea Specialistica/Magistrale a.a. 2013-14

Topologia Algebrica

Terzo Compito. 26 Novembre 2013

Esercizio 1. Sia X uno spazio topologico. Diremo che $Y \subset X$ separa X se $X \setminus Y$ non è connesso per archi. Dimostrare che se A e B sono sottoinsiemi chiusi e disgiunti di S^n che non separano S^n, allora anche $A \cup B$ non separa S^n.
Suggerimento: calcolare H_0 (o, in alternativa, H^0) di un opportuno sottospazio di S^n.

Esercizio 2. Sia X un CW-complesso con 3 celle: una 0-cella; una n-cella ed una m-cella, con $0 < n < m$.

2.1 Verificare che se $m \geq n+2$ allora $H_j(X) \simeq \mathbb{Z}$ per $j = 0, n, m$ ed è invece 0 per gli altri j.

2.2 Verificare che se $m = n+1$ allora per $H_n(X)$ e $H_{n+1}(X)$ si possono verificare solo tre casi:
- questi due gruppi sono banali;
- $H_n(X) \simeq H_{n+1}(X) \simeq \mathbb{Z}$;
- $H_{n+1}(X) = 0$ e $H_n(X)$ è finito ciclico e non-banale.

Nel caso $n = 2$ dare un esplicito esempio per ognuno di questi 3 casi.

Esercizio 3. Sia X un CW-complesso finito. Dimostrare che

$$\chi(X) = \sum_j (-1)^j \alpha_j$$

dove α_j è il numero di celle di dimensione j.
Suggerimento. Dimostrare preliminarmente, usando l'induzione su k, che se $0 \to C_k \to C_{k-1} \to \cdots \to C_1 \to C_0 \to 0$ è un complesso di gruppi abeliani finitamente generati allora

$$\sum_j (-1)^j \mathrm{rg} C_j = \sum_j (-1)^j \mathrm{rg}(H_j(C_*))$$

dove potete utilizzare il fatto che per una successione esatta corta di gruppi abeliani finitamente generati $0 \to G_0 \to G_1 \to G_2 \to 0$ si ha $\mathrm{rg}(G_0) - \mathrm{rg}(G_1) + \mathrm{rg}(G_2) = 0$.

Esercizio 4. Sia Y uno spazio topologico T_2 e f_0, f_1 due mappe continue da S^{n-1} in Y. Verificare che se f_0 è omotopa a f_1 allora $Y \cup_{f_0} D^n$ è omotopicamente equivalente a $Y \cup_{f_1} D^n$.

Esercizio 5. Verificare che $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_r, \mathbb{Z}_s) = \mathbb{Z}_{(r,s)}$ dove $(r,s) := \mathrm{MCD}\{r,s\}$.
Verificare che $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_r, \mathbb{Z}_s) = \mathbb{Z}_{(r,s)}$

Esercizio 6. Sia M una varietà differenziabile *compatta* e sia ω una 1-forma mai nulla. Dimostrare che ω non può essere esatta.

Esercizio 7. Sia (M^n, h) una varietà hermitiana compatta di dimensione (complessa) n. Sia $g := \mathrm{Re} h$ la metrica riemanniana associata a h e sia dg la sua forma di volume. Sia

$\omega := -\frac{1}{2}\mathrm{Im}(h)$ la forma di Kähler associata a h. Abbiamo visto, anche se rapidamente, che $n!dg = \omega^n$. Assumiamo ora che $d\omega = 0$ (si dice allora che (M, h) è di Kähler). Verificare $H^{2j}_{\mathrm{dR}}(M) \neq 0\ \forall j$.
Suggerimento: verificare che $[\omega^j]_{\mathrm{dR}} \neq 0$.

Esercizio 8. Avete visto ad Istituzioni di Geometria Superiore (ma anche in questo corso, come conseguenza del teorema di Hodge) che per la coomologia di de Rham vale il teorema di Künneth: $H^r_{\mathrm{dR}}(M \times N) = \oplus_{r=p+q} H^p_{\mathrm{dR}}(M) \otimes H^q_{\mathrm{dR}}(N)$. Sapete anche che il prodotto wedge induce una struttura di algebra reale graduata su $H^*_{\mathrm{dR}}(M)$.
Verificare che, sebbene $\dim(H^r_{\mathrm{dR}}(S^2 \times S^4) = \dim(H^r_{\mathrm{dR}}(\mathbb{C}P^3))\ \forall r$, non è vero che $S^2 \times S^4$ sia omotopicamente equivalente a $\mathbb{C}P^3$.
Suggerimento: potete utilizzare il fatto che $\mathbb{C}P^n$ può essere dotato di una metrica hermitiana che è di Kähler.