Corso di Laurea Specialistica/Magistrale a.a. 2013-14

Topologia Algebrica

Secondo compito. 29 Ottobre 2013

Esercizio 1. Calcolare l'omologia di $M := \mathbb{R}^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$.

Esercizio 2. Sia M lo spazio ottenuto da $\mathbb{R}^3$ rimuovendo p rette ad intersezione vuota. Calcolare l'omologia di M.

Esercizio 3. Determinare l'omologia singolare di $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$; potete utilizzare la decomposizione cellulare di un prodotto $X \times Y$ di due CW-complessi X e Y tramite le celle dei suoi fattori e la formula (vedere Bredon, Theorem 12.2, p. 213)

$$\partial_{X \times Y}(\sigma \times \tau) = \partial_X \sigma \times \tau + (-1)^{|\sigma|} \sigma \times \partial_Y \tau \,.$$

Esercizio 4. Sia M una varietà topologica di dimensione n ed $x \in M$.
Calcolare $H_j(M, M \setminus \{x\})$

Esercizio 5. Calcolare l'omologia singolare di $\mathbb{C}P^n$.

Esercizio 6. Siano X ed Y due spazi topologici compatti di Hausdorff. Sia $x_0 \in X$ e supponiamo che x_0 ammetta un intorno chiuso N tale che x_0 sia un retratto di deformazione forte di N. Sia $y_0 \in Y$ e supponiamo che y_0 sia un retratto di deformazione forte di un intorno chiuso M. Sia $X \vee Y := X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$. Verificare che

$$\widetilde{H}_q(X \vee Y) \simeq \widetilde{H}_q(X) \oplus \widetilde{H}_q(Y)$$

Esercizio 7. Siano N ed M due varietà topologiche compatte connesse orientabili e di dimensione n. [1] La somma connessa di M e N, è definita come segue:
consideriamo un punto m in M ed un suo piccolo intorno U_m omeomorfo ad un n-disco aperto; consideriamo un analogo punto n in N, con un suo piccolo intorno U_n omeomorfo ad un n-disco aperto; consideriamo $M \setminus U_m$ e $N \setminus V_n$, due varietà con bordo, con bordo omeomorfo a S^{n-1}; uniamo $M \setminus U_m$ e $N \setminus V_n$ lungo il bordo comune tramite la mappa identità di S^{n-1} in se stesso. La somma connessa è denotata con $M\#N$; si può dimostrare che $M\#N$ è ancora una varietà topologica connessa compatta orientabile di dimensione n. Assumendo tutto questo determinare $H_*(M\#N; \mathbb{R}) := H_*(M\#N) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ dimostrando che $H_0(M\#N; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $H_j(M\#N; \mathbb{R}) = H_j(M; \mathbb{R}) \oplus H_j(N; \mathbb{R})$ per $0 < j < n$, $H_n(M\#N; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Esercizio 8. Sia $n \geq 2$. Calcolare la omologia di un toro con n buchi (e cioè di una superficie orientabile di genere n).

[1] Vedremo più avanti che per ogni varietà topologica compatta connessa orientabile e di dimensione n, X, si ha $H_n(X) = \mathbb{Z}$ e $H_j(X) = 0$ per $j > n$.