Corso di Laurea Specialistica/Magistrale a.a. 2013-14

Topologia Algebrica

Quinto Compito. 17 Gennaio 2014

Esercizio 1. Sia $E \to X$ un fibrato vettoriale e $P : E \to E$ un morfismo di fibrati tale che $P^2 = P$. Verificare che

$$\mathrm{Ker}\, P := \cup_{x \in X} \mathrm{Ker}(P_x) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im} P := \cup_{x \in X} \mathrm{Im}(P_x)$$

sono fibrati vettoriali.

Esercizio 2. Sia Y un sottospazio chiuso di uno spazio compatto X, sia $i : Y \hookrightarrow X$ l'inclusione e sia $r : X \to Y$ una retrazione: $r \circ i = \mathrm{id}_Y$. Verificare che esiste una successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow K(X, Y) \to K(X) \to K(Y) \to 0$$

indotta da $j : (X, \emptyset) \to (X, Y)$ e $i : Y \hookrightarrow X$. Verificare inoltre che questa successione spezza e che quindi $K(X) \simeq K(X, Y) \oplus K(Y)$.

Suggerimento. Utilizzare la successione esatta lunga (infinita a sinistra):
$\cdots \to K^{-1}(Y) \xrightarrow{\delta} K(X, Y) \xrightarrow{j^*} K(X) \xrightarrow{i^*} K(Y)$.

Esercizio 3. Sia X uno spazio compatto.
Esiste una naturale mappa di insiemi

$$\lim_N [X, GL(\infty, N)] \to \widetilde{K}(SX)$$

ottenuta associando a $A \in [X, GL(N, \mathbb{C})]$ la classe $[E_A] - [\mathbf{1}^N] \in \widetilde{K}(SX)$ con E_A il fibrato ottenuto per incollamento tramite A dei due fibrati prodotto sui coni $C^{\pm}X$. Dimostrare che questa mappa è un *isomorfismo di gruppi*. Dedurne che esiste un isomorfismo di gruppi

$$\lim_N [X, U(N)] \simeq \widetilde{K}(SX)\,.$$

Suggerimento: Utilizzare la seguente osservazione:
se $A, B \in GL(k, \mathbb{C})$ allora la curva di matrici in $GL(2k, \mathbb{C})$ definita da

$$C_t := \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & 1_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1_k & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix}$$

per $t \in [0, \pi/2]$, unisce

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{vmatrix} AB & 0 \\ 0 & 1_k \end{vmatrix}.$$