

Quarto Compito. 10 Gennaio 2014

**Esercizio 1.** Sia  $n > k$  e sia  $G_k(\mathbb{R}^n)$  l'insieme dei sottospazi vettoriali  $k$ -dimensionali di  $\mathbb{R}^n$ . Seguendo i suggerimenti dati più avanti, dimostrare che  $G_k(\mathbb{R}^n)$  ha una struttura di varietà differenziabile compatta e connessa di dimensione  $k(n - k)$ .

**Esercizio 2.** Sia  $E_k(\mathbb{R}^n) = \{(p, \underline{v}) \in G_k(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \mid \underline{v} \in p\}$  e sia  $\pi : E_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow G_k(\mathbb{R}^n)$  l'applicazione  $(p, \underline{v}) \rightarrow p$ . Dimostrare che la terna  $(E_k(\mathbb{R}^n), \pi, G_k(\mathbb{R}^n))$  è un fibrato vettoriale reale di rango  $k$  e  $C^\infty$ .

**Esercizio 3.** Ripetere l'esercizio 1 nel caso complesso, dimostrando quindi che  $G_k(\mathbb{C}^n)$  è una varietà complessa. Dimostrare che il fibrato universale  $E_k(\mathbb{C}^n)$  è un fibrato *olomorfo*.

**Esercizio 4.** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un ricoprimento. Supponiamo che per ogni coppia  $(\alpha, \beta) \in A \times A$  sia assegnata una funzione continua

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$$

e che questa collezione di mappe verifichi le seguenti proprietà:

- 1)  $g_{\alpha\alpha}(m) = \text{Id}_{k \times k} \quad \forall m \in U_\alpha$
- 2)  $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$  in  $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ .

Sia  $\widehat{E}$  l'unione disgiunta dei  $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ ; introduciamo una relazione d'equivalenza  $\mathcal{R}$  in  $\widehat{E}$  come segue

$$U_\alpha \times \mathbb{R}^k \ni (x, e) \mathcal{R} (y, f) \in U_\beta \times \mathbb{R}^k \Leftrightarrow x = y \text{ e } f = g_{\alpha\beta}(x)e$$

Sia  $E$  lo spazio quoziente dotato della topologia indotta e sia  $\pi : E \rightarrow X$  la mappa che associa alla classe d'equivalenza di  $(x, e)$  il punto  $x \in X$ .

Verificare che  $(E, \pi, X)$  è un fibrato vettoriale (continuo) di rango  $k$ .

**Esercizio 5.** Siano  $(E, \pi_E, X)$  e  $(F, \pi_F, X)$  due fibrati vettoriali  $C^\infty$ . Sia  $\phi : E \rightarrow F$  un morfismo di fibrati e supponiamo che  $\phi|_{E_x}$  sia un isomorfismo per ogni  $x \in X$ . Verificare che  $\phi$  è allora un isomorfismo di fibrati (e cioè  $\phi$  è anche un diffeomorfismo).

**Suggerimenti per l'esercizio 1.**

**Costruzione di una topologia su  $G_k(\mathbb{R}^n)$**

Consideriamo l'insieme  $V_k(\mathbb{R}^n)$  delle  $k$ -ple di vettori linearmente indipendenti di  $\mathbb{R}^n$ .

**Esercizio 1.1.**

Verificare che  $V_k(\mathbb{R}^n)$  è un aperto del prodotto cartesiano  $\mathbb{R}^n \times \binom{k}{n} \times \mathbb{R}^n$ .

*Suggerimento.*  $V_k(\mathbb{R}^n)$  è l'insieme delle matrici reali  $k \times n$  con rango uguale a  $k$ ; trovare un'applicazione continua  $F : M_{k \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^N$ , con  $N$  opportuno, tale che  $V_k(\mathbb{R}^n) = F^{-1}(\mathbb{R}^N \setminus \underline{0})$ .

Consideriamo l'applicazione suriettiva

$$q : V_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow G_k(\mathbb{R}^n)$$

che alla  $k$ -pla  $(v_1, \dots, v_k)$  associa il sottospazio  $\text{Span}(v_1, \dots, v_k)$  e dotiamo  $G_k(\mathbb{R}^n)$  della topologia quoziente  $\mathcal{T}$ .

Alternativamente, possiamo considerare l'insieme  $V_k^0(\mathbb{R}^n)$  delle  $k$ -ple di vettori ortonormali e la suriezione  $q_0 = q|_{V_k^0(\mathbb{R}^n)}$ . Possiamo anche dotare  $G_k(\mathbb{R}^n)$  della topologia quoziente rispetto a  $q_0 : V_k^0(\mathbb{R}^n) \rightarrow G_k(\mathbb{R}^n)$ ; sia  $\mathcal{T}_0$  questa topologia.

**Esercizio 1.2.**

Verificare che  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0$ .

Suggerimento. Considerate il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccccc}
 V_k^0(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{i} & V_k(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}} & V_k^0(\mathbb{R}^n) \\
 q_0 \downarrow & & q \downarrow & & \downarrow q_0 \\
 G_k(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{id} & G_k(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{id} & G_k(\mathbb{R}^n)
 \end{array}$$

Dimostrate che questo diagramma è commutativo (è banale) e costituito da applicazioni continue. Servitevene per concludere l'esercizio.

**Esercizio 1.3.**

Verificare che  $V_k^0(\mathbb{R}^n)$  è un compatto di  $M_{k \times n}(\mathbb{R}^n)$ .

**Esercizio 1.4.**

Dimostrare che  $G_k(\mathbb{R}^n)$  è di Hausdorff.

Suggerimento. Basta dimostrare che due qualsiasi punti  $Y, Z \in G_k(\mathbb{R}^n)$  sono separati da una funzione continua. Fissato  $w \in \mathbb{R}^n$ , consideriamo  $\rho_w(X) = d(w, X)^2$ . Verificare che  $\rho_w : G_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  è continua. Considerate poi  $w \in Z \setminus Y$  e concludete l'esercizio.

**Conclusione:**  $G_k(\mathbb{R}^n)$  è uno spazio topologico di Hausdorff compatto.

**Ulteriori proprietà topologiche**

**Esercizio 1.5.**

Dimostrare che  $G_k(\mathbb{R}^n)$  è connesso.

Suggerimento. Dimostrate che  $G_k(\mathbb{R}^n)$  è connesso per archi. Presi  $X$  ed  $Y$  in  $G_k(\mathbb{R}^n)$  occorre trovare un cammino che li congiunge. Cercate di utilizzare il fatto che

$$GL(n, \mathbb{R})^+ := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\}$$

è connesso per archi.

Osserviamo che ci sono anche altri metodi per dimostrare che  $G_k(\mathbb{R}^n)$  è connesso.

**Esercizio 1.6.**

Dimostrare la seguente Proposizione: Siano  $X$  ed  $Y$  spazi topologici, con  $X$  a base numerabile. Supponiamo che esista un'applicazione continua  $f : X \rightarrow Y$  che sia suriettiva ed aperta. Allora  $Y$  è a base numerabile.

**Esercizio 1.7.**

Dimostrare che  $G_k(\mathbb{R}^n)$  è a base numerabile.

*Suggerimento. Dato che  $V^k(\mathbb{R}^n)$  è a base numerabile (è un aperto di  $\mathbb{R}^n \times \overset{(k)}{\dots} \times \mathbb{R}^n$ ), basta dimostrare che  $q$  è aperta.*<sup>1</sup>

### Costruzione di una struttura differenziabile su $G_k(\mathbb{R}^n)$

Fissiamo  $X_0 \in G_k(\mathbb{R}^n)$ : vogliamo dimostrare che esiste un intorno aperto  $U$  di  $X_0$  omeomorfo a  $\mathbb{R}^{k(n-k)}$ . Ricordiamo che possiamo scrivere  $\mathbb{R}^n = X_0 \oplus X_0^\perp$ . Sia

$$U = \{Y \in G_k(\mathbb{R}^n) \mid Y \cap X_0^\perp = 0\}.$$

#### Esercizio 1.8.

*Dimostrare che  $U$  è un aperto di  $G_k(\mathbb{R}^n)$ .*

*Suggerimento. Se  $\{x_1, \dots, x_{n-k}\}$  è una base di  $X_0^\perp$ , dimostrate dapprima che*

$$q^{-1}(U) = \{(y_1, \dots, y_k) \mid (y_1, \dots, y_k, x_1, \dots, x_{n-k}) \in V_n(\mathbb{R}^n)\};$$

*verificate poi che  $q^{-1}(U)$  è aperto costruendo un'applicazione continua  $F : V_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $q^{-1}(U) = F^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ .*

Indichiamo con  $\pi$  e  $\pi_\perp$  le proiezioni ortogonali di  $X_0 \oplus X_0^\perp$  su  $X_0$  e  $X_0^\perp$  rispettivamente.

**Esercizio 1.9.** *Per ogni  $Y \in U$ , si ha che  $\pi|_Y : Y \rightarrow X_0$  è un isomorfismo di spazi vettoriali.*

*Suggerimento: basta dimostrare che è iniettiva.*

Rimane quindi definita l'applicazione

$$\begin{aligned} S : U &\longrightarrow \text{Hom}(X_0, X_0^\perp) \\ Y &\longmapsto \pi_\perp|_Y \circ (\pi|_Y)^{-1} \end{aligned}$$

Fissiamo poi una base  $\mathbb{V} := \{v_1, \dots, v_k\}$  in  $X_0$  ed una base  $\mathbb{U} := \{u_1, \dots, u_{n-k}\}$  in  $X_0^\perp$ ; rimane allora definito un isomorfismo di spazi vettoriali (quindi, in particolare, un omeomorfismo)

$$\Phi_{\mathbb{V}, \mathbb{U}} : \text{Hom}(X_0, X_0^\perp) \rightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)};$$

$\Phi_{\mathbb{V}, \mathbb{U}}$  è l'applicazione che associa ad un'applicazione lineare  $X_0 \rightarrow X_0^\perp$  la sua matrice associata con base di partenza  $\mathbb{V}$  e base di arrivo  $\mathbb{U}$ .

Sia  $T_{\mathbb{V}, \mathbb{U}} := \Phi_{\mathbb{V}, \mathbb{U}} \circ S$ ; denoteremo spesso questa applicazione semplicemente con  $T$ .

**Esercizio 1.10.** *Verificare che  $T$  è continua.*

*Suggerimento: potete ad esempio cercare  $\tilde{T} : q^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)}$  continua tale che  $T \circ q = \tilde{T}$ .*

Inoltre  $T$  è biiettiva; infatti  $\Phi_{\mathbb{V}, \mathbb{U}}$  è ovviamente biiettiva;  $S$  è anche biiettiva, con inversa data, per ogni  $\varphi \in \text{Hom}(X_0, X_0^\perp)$ , da

$$S^{-1}(\varphi) = \text{Span}(x_1 + \varphi(x_1), \dots, x_k + \varphi(x_k))$$

---

<sup>1</sup>Vediamolo per  $k = 1$ , cioè per lo spazio proiettivo (voi dovrete fare il caso generale). Notiamo che  $V^1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \setminus 0$  e che  $\mathbb{R} \setminus 0 \cong GL(1, \mathbb{R})$  agisce per omeomorfismi su  $V^1(\mathbb{R}^n)$ . Notiamo anche che

$$q^{-1}(q(v)) = \cup_{\lambda \neq 0} \lambda v \equiv \cup_{\lambda \in GL(1, \mathbb{R})} \lambda v$$

Ne segue che se  $A$  è aperto in  $V^1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \setminus 0$  allora

$$q^{-1}(q(A)) = \cup_{\lambda \in GL(1, \mathbb{R})} \lambda A$$

che è aperto in quanto unione di aperti. Per definizione si ha allora che  $q(A)$  è aperto.

**Esercizio 1.11.** Verificare l'espressione di  $S^{-1}$ ; verificare che l'inversa di  $T$  è continua.

In conclusione, ogni  $X \in G_k(\mathbb{R}^n)$  possiede un intorno coordinato omeomorfo a  $\mathbb{R}^{k(n-k)}$  ed è quindi una varietà topologica (connessa e compatta) di dimensione  $k(n-k)$ .

Rimane da verificare che due carte locali sono  $C^\infty$ -compatibili sulla loro intersezione.

**Osservazione.** Sia  $Y \in U$ . Fissiamo una base  $\{v_1, \dots, v_k\}$  di  $X_0$ ; allora, esiste un' **unica** base  $\{y_1, \dots, y_k\}$  di  $Y$  tale che  $\pi(y_i) = v_i$  e vale l'identità  $y_i = v_i + S(Y)v_i$ .

Consideriamo, allora, due intorni coordinati  $U$  e  $U'$  tali che  $U \cap U' \neq \emptyset$ ;

$$U = \{Y \mid Y \cap X^\perp = 0\}, \quad U' = \{Y \mid Y \cap (X')^\perp = 0\}$$

Osserviamo preliminarmente che le carte che abbiamo introdotto in  $U$  e  $U'$  rispettivamente dipendono dalla scelta delle due basi in  $X, X^\perp$  e  $X', (X')^\perp$ ; è chiaro però che se dimostriamo che le due carte  $U$  e  $U'$  sono  $C^\infty$ -compatibili per scelte particolari delle basi, allora le carte saranno  $C^\infty$ -compatibili per scelte arbitrarie delle basi<sup>2</sup>. Questa osservazione preliminare ci permette di scegliere basi opportune, che semplificano la dimostrazione della  $C^\infty$ -compatibilità.

Fissiamo quindi  $Y \in U \cap U'$ . Sia  $\mathbb{V} = \{v_1, \dots, v_k\}$  una base di  $X$  e sia  $\mathbb{U} = \{u_1, \dots, u_{n-k}\}$  una base per  $X^\perp$ . Indichiamo con  $v'_i$  la proiezione su  $X'$  di  $v_i + S(Y)v_i$ .  $\{v'_1, \dots, v'_k\}$  è una base di  $X'$  e rimane definita un'applicazione lineare invertibile  $\psi : X \rightarrow X'$  tale che  $\psi(v_i) = v'_i$ ;  $\psi \equiv \pi'|_Y \circ \pi|_Y^{-1}$ , dove  $\pi|_Y$  è la proiezione di  $Y$  su  $X$  e  $\pi'|_Y$  quella su  $X'$ , entrambe isomorfismi per quanto osservato in precedenza. Consideriamo la base  $\mathbb{V}' = \{v'_1, \dots, v'_k\}$  di  $X'$  e sia  $\mathbb{U}'$  un'arbitraria base ortonormale di  $(X')^\perp$ .

**Esercizio 1.12** Verificare che le carte  $(U, T_{\mathbb{V}, \mathbb{U}})$  e  $(U', T'_{\mathbb{V}', \mathbb{U}'})$  sono  $C^\infty$ -compatibili. In altri termini, consideriamo  $T(U \cap U')$  e  $T'(U \cap U')$ , due sottoinsiemi aperti di  $\mathbb{R}^{k(n-k)} \equiv M_{(n-k) \times k}(\mathbb{R})$ ; dimostrate che l'applicazione  $T' \circ T^{-1}$ :

$$M_{(n-k) \times k}(\mathbb{R}) \supseteq T(U \cap U') \ni A \longrightarrow T' \circ T^{-1}(A) \in T'(U \cap U') \subseteq M_{(n-k) \times k}(\mathbb{R})$$

dipende in maniera  $C^\infty$  dai coefficienti della matrice  $A$ .

Ora mettete tutto insieme e concludete l'esercizio 1 dimostrando che

La Grassmanniana  $G_k(\mathbb{R}^n)$  ha una struttura di varietà differenziabile connessa compatta di dimensione  $k(n-k)$ .

---

<sup>2</sup>Questa è una semplice conseguenza della formula che lega le matrici associate ad una stessa applicazione lineare quando si scelgano basi di partenza ed arrivo differenti