

Quarto Compito. 10 Gennaio 2014

Esercizio 1. Sia $n > k$ e sia $G_k(\mathbb{R}^n)$ l'insieme dei sottospazi vettoriali k -dimensionali di \mathbb{R}^n . Seguendo i suggerimenti dati più avanti, dimostrare che $G_k(\mathbb{R}^n)$ ha una struttura di varietà differenziabile compatta e connessa di dimensione $k(n - k)$.

Esercizio 2. Sia $E_k(\mathbb{R}^n) = \{(p, \underline{v}) \in G_k(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \mid \underline{v} \in p\}$ e sia $\pi : E_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow G_k(\mathbb{R}^n)$ l'applicazione $(p, \underline{v}) \rightarrow p$. Dimostrare che la terna $(E_k(\mathbb{R}^n), \pi, G_k(\mathbb{R}^n))$ è un fibrato vettoriale reale di rango k e C^∞ .

Esercizio 3. Ripetere l'esercizio 1 nel caso complesso, dimostrando quindi che $G_k(\mathbb{C}^n)$ è una varietà complessa. Dimostrare che il fibrato universale $E_k(\mathbb{C}^n)$ è un fibrato *olomorfo*.

Esercizio 4. Sia X uno spazio topologico e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento. Supponiamo che per ogni coppia $(\alpha, \beta) \in A \times A$ sia assegnata una funzione continua

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$$

e che questa collezione di mappe verifichi le seguenti proprietà:

- 1) $g_{\alpha\alpha}(m) = \text{Id}_{k \times k} \quad \forall m \in U_\alpha$
- 2) $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$ in $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Sia \widehat{E} l'unione disgiunta dei $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$; introduciamo una relazione d'equivalenza \mathcal{R} in \widehat{E} come segue

$$U_\alpha \times \mathbb{R}^k \ni (x, e) \mathcal{R} (y, f) \in U_\beta \times \mathbb{R}^k \Leftrightarrow x = y \text{ e } f = g_{\alpha\beta}(x)e$$

Sia E lo spazio quoziente dotato della topologia indotta e sia $\pi : E \rightarrow X$ la mappa che associa alla classe d'equivalenza di (x, e) il punto $x \in X$.

Verificare che (E, π, X) è un fibrato vettoriale (continuo) di rango k .

Esercizio 5. Siano (E, π_E, X) e (F, π_F, X) due fibrati vettoriali C^∞ . Sia $\phi : E \rightarrow F$ un morfismo di fibrati e supponiamo che $\phi|_{E_x}$ sia un isomorfismo per ogni $x \in X$. Verificare che ϕ è allora un isomorfismo di fibrati (e cioè ϕ è anche un diffeomorfismo).

Suggerimenti per l'esercizio 1.

Costruzione di una topologia su $G_k(\mathbb{R}^n)$

Consideriamo l'insieme $V_k(\mathbb{R}^n)$ delle k -ple di vettori linearmente indipendenti di \mathbb{R}^n .

Esercizio 1.1.

Verificare che $V_k(\mathbb{R}^n)$ è un aperto del prodotto cartesiano $\mathbb{R}^n \times \binom{k}{!} \times \mathbb{R}^n$.

Suggerimento. $V_k(\mathbb{R}^n)$ è l'insieme delle matrici reali $k \times n$ con rango uguale a k ; trovare un'applicazione continua $F : M_{k \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^N$, con N opportuno, tale che $V_k(\mathbb{R}^n) = F^{-1}(\mathbb{R}^N \setminus \underline{0})$.

Consideriamo l'applicazione suriettiva

$$q : V_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow G_k(\mathbb{R}^n)$$

che alla k -pla (v_1, \dots, v_k) associa il sottospazio $\text{Span}(v_1, \dots, v_k)$ e dotiamo $G_k(\mathbb{R}^n)$ della topologia quoziente \mathcal{T} .

Alternativamente, possiamo considerare l'insieme $V_k^0(\mathbb{R}^n)$ delle k -ple di vettori ortonormali e la suriezione $q_0 = q|_{V_k^0(\mathbb{R}^n)}$. Possiamo anche dotare $G_k(\mathbb{R}^n)$ della topologia quoziente rispetto a $q_0 : V_k^0(\mathbb{R}^n) \rightarrow G_k(\mathbb{R}^n)$; sia \mathcal{T}_0 questa topologia.

Esercizio 1.2.

Verificare che $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0$.

Suggerimento. Considerate il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccccc} V_k^0(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{i} & V_k(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}} & V_k^0(\mathbb{R}^n) \\ q_0 \downarrow & & q \downarrow & & \downarrow q_0 \\ G_k(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{id} & G_k(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{id} & G_k(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

Dimostrate che questo diagramma è commutativo (è banale) e costituito da applicazioni continue. Servitevene per concludere l'esercizio.

Esercizio 1.3.

Verificare che $V_k^0(\mathbb{R}^n)$ è un compatto di $M_{k \times n}(\mathbb{R}^n)$.

Esercizio 1.4.

Dimostrare che $G_k(\mathbb{R}^n)$ è di Hausdorff.

Suggerimento. Basta dimostrare che due qualsiasi punti $Y, Z \in G_k(\mathbb{R}^n)$ sono separati da una funzione continua. Fissato $w \in \mathbb{R}^n$, consideriamo $\rho_w(X) = d(w, X)^2$. Verificare che $\rho_w : G_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua. Considerate poi $w \in Z \setminus Y$ e concludete l'esercizio.

Conclusione: $G_k(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio topologico di Hausdorff compatto.

Ulteriori proprietà topologiche

Esercizio 1.5.

Dimostrare che $G_k(\mathbb{R}^n)$ è connesso.

Suggerimento. Dimostrate che $G_k(\mathbb{R}^n)$ è connesso per archi. Presi X ed Y in $G_k(\mathbb{R}^n)$ occorre trovare un cammino che li congiunge. Cercate di utilizzare il fatto che

$$GL(n, \mathbb{R})^+ := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\}$$

è connesso per archi.

Osserviamo che ci sono anche altri metodi per dimostrare che $G_k(\mathbb{R}^n)$ è connesso.

Esercizio 1.6.

Dimostrare la seguente Proposizione: Siano X ed Y spazi topologici, con X a base numerabile. Supponiamo che esista un'applicazione continua $f : X \rightarrow Y$ che sia suriettiva ed aperta. Allora Y è a base numerabile.

Esercizio 1.7.

Dimostrare che $G_k(\mathbb{R}^n)$ è a base numerabile.

Suggerimento. Dato che $V^k(\mathbb{R}^n)$ è a base numerabile (è un aperto di $\mathbb{R}^n \times \overset{(k)}{\dots} \times \mathbb{R}^n$), basta dimostrare che q è aperta.¹

Costruzione di una struttura differenziabile su $G_k(\mathbb{R}^n)$

Fissiamo $X_0 \in G_k(\mathbb{R}^n)$: vogliamo dimostrare che esiste un intorno aperto U di X_0 omeomorfo a $\mathbb{R}^{k(n-k)}$. Ricordiamo che possiamo scrivere $\mathbb{R}^n = X_0 \oplus X_0^\perp$. Sia

$$U = \{Y \in G_k(\mathbb{R}^n) \mid Y \cap X_0^\perp = 0\}.$$

Esercizio 1.8.

Dimostrare che U è un aperto di $G_k(\mathbb{R}^n)$.

Suggerimento. Se $\{x_1, \dots, x_{n-k}\}$ è una base di X_0^\perp , dimostrate dapprima che

$$q^{-1}(U) = \{(y_1, \dots, y_k) \mid (y_1, \dots, y_k, x_1, \dots, x_{n-k}) \in V_n(\mathbb{R}^n)\};$$

verificate poi che $q^{-1}(U)$ è aperto costruendo un'applicazione continua $F : V_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $q^{-1}(U) = F^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Indichiamo con π e π_\perp le proiezioni ortogonali di $X_0 \oplus X_0^\perp$ su X_0 e X_0^\perp rispettivamente.

Esercizio 1.9. Per ogni $Y \in U$, si ha che $\pi|_Y : Y \rightarrow X_0$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Suggerimento: basta dimostrare che è iniettiva.

Rimane quindi definita l'applicazione

$$\begin{aligned} S : U &\longrightarrow \text{Hom}(X_0, X_0^\perp) \\ Y &\longmapsto \pi_\perp|_Y \circ (\pi|_Y)^{-1} \end{aligned}$$

Fissiamo poi una base $\mathbb{V} := \{v_1, \dots, v_k\}$ in X_0 ed una base $\mathbb{U} := \{u_1, \dots, u_{n-k}\}$ in X_0^\perp ; rimane allora definito un isomorfismo di spazi vettoriali (quindi, in particolare, un omeomorfismo)

$$\Phi_{\mathbb{V}, \mathbb{U}} : \text{Hom}(X_0, X_0^\perp) \rightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)};$$

$\Phi_{\mathbb{V}, \mathbb{U}}$ è l'applicazione che associa ad un'applicazione lineare $X_0 \rightarrow X_0^\perp$ la sua matrice associata con base di partenza \mathbb{V} e base di arrivo \mathbb{U} .

Sia $T_{\mathbb{V}, \mathbb{U}} := \Phi_{\mathbb{V}, \mathbb{U}} \circ S$; denoteremo spesso questa applicazione semplicemente con T .

Esercizio 1.10. Verificare che T è continua.

Suggerimento: potete ad esempio cercare $\tilde{T} : q^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)}$ continua tale che $T \circ q = \tilde{T}$.

Inoltre T è biiettiva; infatti $\Phi_{\mathbb{V}, \mathbb{U}}$ è ovviamente biiettiva; S è anche biiettiva, con inversa data, per ogni $\varphi \in \text{Hom}(X_0, X_0^\perp)$, da

$$S^{-1}(\varphi) = \text{Span}(x_1 + \varphi(x_1), \dots, x_k + \varphi(x_k))$$

¹Vediamolo per $k = 1$, cioè per lo spazio proiettivo (voi dovrete fare il caso generale). Notiamo che $V^1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e che $\mathbb{R} \setminus \{0\} \cong GL(1, \mathbb{R})$ agisce per omeomorfismi su $V^1(\mathbb{R}^n)$. Notiamo anche che

$$q^{-1}(q(v)) = \cup_{\lambda \neq 0} \lambda v \equiv \cup_{\lambda \in GL(1, \mathbb{R})} \lambda v$$

Ne segue che se A è aperto in $V^1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ allora

$$q^{-1}(q(A)) = \cup_{\lambda \in GL(1, \mathbb{R})} \lambda A$$

che è aperto in quanto unione di aperti. Per definizione si ha allora che $q(A)$ è aperto.

Esercizio 1.11. Verificare l'espressione di S^{-1} ; verificare che l'inversa di T è continua.

In conclusione, ogni $X \in G_k(\mathbb{R}^n)$ possiede un intorno coordinato omeomorfo a $\mathbb{R}^{k(n-k)}$ ed è quindi una varietà topologica (connessa e compatta) di dimensione $k(n-k)$.

Rimane da verificare che due carte locali sono C^∞ -compatibili sulla loro intersezione.

Osservazione. Sia $Y \in U$. Fissiamo una base $\{v_1, \dots, v_k\}$ di X_0 ; allora, esiste un' **unica** base $\{y_1, \dots, y_k\}$ di Y tale che $\pi(y_i) = v_i$ e vale l'identità $y_i = v_i + S(Y)v_i$.

Consideriamo, allora, due intorni coordinati U e U' tali che $U \cap U' \neq \emptyset$;

$$U = \{Y \mid Y \cap X^\perp = 0\}, \quad U' = \{Y \mid Y \cap (X')^\perp = 0\}$$

Osserviamo preliminarmente che le carte che abbiamo introdotto in U e U' rispettivamente dipendono dalla scelta delle due basi in X, X^\perp e $X', (X')^\perp$; è chiaro però che se dimostriamo che le due carte U e U' sono C^∞ -compatibili per scelte particolari delle basi, allora le carte saranno C^∞ -compatibili per scelte arbitrarie delle basi². Questa osservazione preliminare ci permette di scegliere basi opportune, che semplificano la dimostrazione della C^∞ -compatibilità.

Fissiamo quindi $Y \in U \cap U'$. Sia $\mathbb{V} = \{v_1, \dots, v_k\}$ una base di X e sia $\mathbb{U} = \{u_1, \dots, u_{n-k}\}$ una base per X^\perp . Indichiamo con v'_i la proiezione su X' di $v_i + S(Y)v_i$. $\{v'_1, \dots, v'_k\}$ è una base di X' e rimane definita un'applicazione lineare invertibile $\psi : X \rightarrow X'$ tale che $\psi(v_i) = v'_i$; $\psi \equiv \pi'|_Y \circ \pi|_Y^{-1}$, dove $\pi|_Y$ è la proiezione di Y su X e $\pi'|_Y$ quella su X' , entrambe isomorfismi per quanto osservato in precedenza. Consideriamo la base $\mathbb{V}' = \{v'_1, \dots, v'_k\}$ di X' e sia \mathbb{U}' un'arbitraria base ortonormale di $(X')^\perp$.

Esercizio 1.12 Verificare che le carte $(U, T_{\mathbb{V}, \mathbb{U}})$ e $(U', T'_{\mathbb{V}', \mathbb{U}'})$ sono C^∞ -compatibili. In altri termini, consideriamo $T(U \cap U')$ e $T'(U \cap U')$, due sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^{k(n-k)} \equiv M_{(n-k) \times k}(\mathbb{R})$; dimostrate che l'applicazione $T' \circ T^{-1}$:

$$M_{(n-k) \times k}(\mathbb{R}) \supseteq T(U \cap U') \ni A \longrightarrow T' \circ T^{-1}(A) \in T'(U \cap U') \subseteq M_{(n-k) \times k}(\mathbb{R})$$

dipende in maniera C^∞ dai coefficienti della matrice A .

Ora mettete tutto insieme e concludete l'esercizio 1 dimostrando che

La Grassmanniana $G_k(\mathbb{R}^n)$ ha una struttura di varietà differenziabile connessa compatta di dimensione $k(n-k)$.

²Questa è una semplice conseguenza della formula che lega le matrici associate ad una stessa applicazione lineare quando si scelgano basi di partenza ed arrivo differenti