Topologia Algebrica. a.a. 2013-14.
Primo compito a casa

October 14, 2013

Esercizio 1. Verificare che l'operatore di bordo $\partial : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$,

$$\partial := \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \partial_j$$

è tale che $\partial \circ \partial = 0$.
Suggerimento: per gli operatori ∂_j vale che $\partial_i \circ \partial_j = \partial_{j-1} \circ \partial_i$ se $i < j$.

Esercizio 2. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua. Verificare che $f_\sharp : S_*(X) \to S_*(Y)$, definito sui simplessi singolari come $f_\sharp(\phi) := \phi \circ f$, è un omomorfismo di complessi

Esercizio 3. Sia

$$0 \to C^\bullet \xrightarrow{f} D^\bullet \xrightarrow{g} E^\bullet \to 0$$

una successione esatta corta di complessi. Completare la verifica dell'esattezza della successione esatta lunga in omologia:

$$\cdots \to H_n(C^\bullet) \xrightarrow{f_*} H_n(D^\bullet) \xrightarrow{g_*} H_n(E^\bullet) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(C^\bullet) \xrightarrow{f_*} \to \cdots$$

(Rimane da vedere che $\operatorname{Im}\Delta = \operatorname{Ker} f_*$; tuttavia, vi consiglio di ridimostrare da soli l'esattezza di tutta la successione.)

Esercizio 4. Calcolare l'omologia singolare di S^1 dimostrando che

$$H_0(S^1) = \mathbb{Z}\,, \quad H_1(S^1) = \mathbb{Z}\,, \quad H_n(S^1) = 0 \;\; \forall n > 1\,.$$

Suggerimento: utilizzare Mayer-Vietoris con $U = S^1 \setminus (0,1)$ e $V = S^1 \setminus (0,-1)$.

Esercizio 5. Calcolare l'omologia singolare di S^n dimostrando che

$$H_0(S^n) = \mathbb{Z}\,, \quad H_n(S^n) = \mathbb{Z}\,, \quad H_\ell(S^n) = 0 \;\text{ se }\; \ell \notin \{0, n\}.$$

Suggerimento: utilizzare Mayer-Vietoris con $U = S^n \setminus N$ e $V = S^n \setminus S$ con N ed S il polo nord e sud rispettivamente. Procedere per induzione su n.

Esercizio 6. Calcolare l'omologia singolare del toro 2-dimensionale T^2 dimostrando che

$$H_0(T^2) = \mathbb{Z}\,, \quad H_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\,, \quad H_2(T^2) = \mathbb{Z}\,.$$

Suggerimento: utilizzare Mayer-Vietoris con $U = S^1 \times (S^1 \setminus (0,1))$ e $V = S^1 \times (S^1 \setminus (0,-1))$.

Esercizio 7. Sia T^n il toro n-dimensionale (T^n è il prodotto cartesiano di n-copie di S^1). Calcolare l'omologia singolare di T^n dimostrando che $H_k(T^n)$ è la somma diretta di $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)$ copie di $\mathbb{Z}$ se $k \leq n$ e $H_k(T^n) = 0$ se $k > n$.
Suggerimento: utilizzare Mayer-Vietoris con $U = T^{n-1} \times (S^1 \setminus (0,1))$ e $V = T^{n-1} \times (S^1 \setminus (0,-1))$. Procedere per induzione su n.