Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2023-24.
Prof. P. Piazza

Diagonalizzazione delle forme bilineari simmetriche senza il teorema spettrale

Queste note sono parzialmente facoltative.
Il teorema di Sylvester può essere dimostrato senza far uso del teorema spettrale. Questo approccio, che è quello originale di Sylvester, permette di costruire induttivamente una base di Sylvester senza calcolare alcun autovalore e senza calcolare alcun autospazio.
Il passo fondamentale è il seguente:

Teorema *Sia* $b : V \times V \to \mathbb{R}$ *una forma bilineare simmetrica in uno spazio vettoriale reale. Allora esiste una base di* V, $\{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n\}$, *che diagonalizza* $b(\ ,\ )$, *tale cioè che* $b(\underline{f}_i, \underline{f}_j) = 0$ *per* $i \neq j$.

Prima di passare alla dimostrazione, premettiamo una definizione ed un' *osservazione fondamentale*.
Definizione: un vettore $\underline{v}$ è **isotropo** per $b(\ ,\ )$ se $b(\underline{v}, \underline{v}) = 0$.
Osserviamo che se $\underline{f}$ è un vettore *non isotropo* di V allora vale la decomposizione

$$V = \mathbb{R}\underline{f} \oplus (\mathbb{R}\underline{f})^{\perp_b} \tag{1}$$

dove

$$(\mathbb{R}\underline{f})^{\perp_b} = \{\underline{v} \in V \,|\, b(\underline{v}, \underline{f}) = 0\,\}\,.$$

In generale, per un qualsiasi sottospazio U di V si pone

$$U^{\perp_b} = \{\underline{v} \in V \,|\, b(\underline{v}, \underline{u}) = 0\,,\ \forall \underline{u} \in U\}\,.$$

$U^{\perp_b}$ è detto il b-ortogonale di U. La dimostrazione della decomposizione (1) utilizza una tecnica già vista per i prodotti scalari definiti positivi. Vediamo.
Dimostrazione di (1) (facoltativa). Per ipotesi $\underline{f}$ è non isotropo; quindi, per definizione, $b(\underline{f}, \underline{f}) \neq 0$. Scriviamo allora

$$\underline{v} = \frac{b(\underline{v}, \underline{f})}{b(\underline{f}, \underline{f})}\underline{f} + (\underline{v} - \frac{b(\underline{v}, \underline{f})}{b(\underline{f}, \underline{f})}\underline{f})$$

Il primo addendo a destra appartiene sicuramente a $\mathbb{R}\underline{f}$. Verifichiamo che il secondo addendo appartiene a $(\mathbb{R}\underline{f})^{\perp_b}$; utilizzando la bilinearità abbiamo:

$$b(\underline{v} - \frac{b(\underline{v}, \underline{f})}{b(\underline{f}, \underline{f})}\underline{f}\,,\, \underline{f}) = b(\underline{v}, \underline{f}) - b(\frac{b(\underline{v}, \underline{f})}{b(\underline{f}, \underline{f})}\underline{f}, \underline{f}) = b(\underline{v}, \underline{f}) - (\frac{b(\underline{v}, \underline{f})}{b(\underline{f}, \underline{f})})b(\underline{f}, \underline{f}) = 0$$

Quindi

$$V = \mathbb{R}\underline{f} + (\mathbb{R}\underline{f})^{\perp_b}$$

Verifichiamo anche che $\mathbb{R}\underline{f} \cap (\mathbb{R}\underline{f})^{\perp_b} = \underline{0}$; se $\underline{w} \in \mathbb{R}\underline{f} \cap (\mathbb{R}\underline{f})^{\perp_b}$ allora $\underline{w} = \alpha\underline{f}$ (perché $\underline{w} \in \mathbb{R}\underline{f}$) **e** $b(\underline{w}, \underline{f}) = 0$ (perché $\underline{w} \in (\mathbb{R}\underline{f})^{\perp_b}$). Ma allora deve essere $\alpha b(\underline{f}, \underline{f}) = 0$ ed essendo $\underline{f}$ non isotropo deve necessariamente essere $\alpha = 0$ cioè $\underline{w} = \underline{0}$. Abbiamo dimostrato che $V = \mathbb{R}\underline{f} \oplus (\mathbb{R}\underline{f})^{\perp_b}$.
Fine osservazione fondamentale.

Dimostrazione teorema (facoltativa). Procediamo per induzione su $\dim V$. Se $\dim V = 1$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo vero il teorema per spazi vettoriali di dimensione $n-1$ e dimostriamolo per spazi vettoriali di dimensione n. Se $b(\,,\,)$ è la forma bilineare identicamente uguale a zero, allora non c'è nulla da dimostrare, dato che ogni base è diagonalizzante.
Se $b(\,,\,)$ non è identicamente nulla allora $\exists\, \underline{v}\,,\ \underline{w} \in V$ non nulli tali che $b(\underline{v}, \underline{w}) \neq 0$. Ora, fra i tre vettori $\underline{v}, \underline{w}, \underline{v} + \underline{w}$ ne esiste almeno uno che è *non isotropo*. Infatti se $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono isotropi allora

$$b(\underline{v}+\underline{w}, \underline{v}+\underline{w}) = b(\underline{v}, \underline{v}) + b(\underline{v}, \underline{w}) + b(\underline{w}, \underline{v}) + b(\underline{w}, \underline{w}) =$$
$$b(\underline{v}, \underline{v}) + 2b(\underline{v}, \underline{w}) + b(\underline{w}, \underline{w}) = 0 + 2b(\underline{v}, \underline{w}) + 0 \neq 0$$

come si voleva. Riassumendo: se $b(\,,\,)$ non è identicamente nulla allora esiste un vettore non isotropo $\underline{f}_1$. Ma allora, per l'*osservazione fondamentale*

$$V = \mathbb{R}\underline{f}_1 \oplus (\mathbb{R}\underline{f}_1)^{\perp_b}\,.$$

Sia $b'(\,,\,)$ la restrizione di $b(\,,\,)$ al sottospazio $(n-1)$-dimensionale $(\mathbb{R}\underline{f}_1)^{\perp_b}$. $b'(\,,\,)$ è ovviamente una forma bilineare simmetrica su uno spazio vettoriale di dimensione $(n-1)$. Per ipotesi induttiva esiste una base $\{\underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_n\}$ che diagonalizza $b'(\,,\,)$. Ma allora è immediato verificare che $\{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_n\}$ è una base diagonalizzante per $b(\,,\,)$. Il teorema è dimostrato.

Quindi possiamo diagonalizzare le forme bilineari simmetriche senza utilizzare il teorema spettrale. Sia $\{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_n\}$ la base diagonalizzante ottenuta tramite il procedimento induttivo appena spiegato. Se $\alpha_j = b(\underline{f}_j, \underline{f}_j)$ allora possiamo assumere, a meno di riordinare i vettori,

$\alpha_i > 0$ se $i \leq \rho_+$
$\alpha_i < 0$ se $(\rho_+ + 1) \leq i \leq (\rho_+ + \rho_-)$
$\alpha_i = 0$ se $((\rho_+ + \rho_-) + 1) \leq i \leq (\rho_+ + \rho_- + \rho_0) = n\,.$

Poniamo
$\underline{v}_i = \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}}\underline{f}_i$ se $i \leq \rho_+$
$\underline{v}_i = \frac{1}{\sqrt{-\alpha_i}}\underline{f}_i$ se $(\rho_+ + 1) \leq i \leq (\rho_+ + \rho_-)$
$\underline{v}_i = \underline{f}_i$ se $((\rho_+ + \rho_-) + 1) \leq i \leq (\rho_+ + \rho_- + \rho_0)\,.$

La matrice associata a $b(\,,\,)$ in questa base è

$$\begin{vmatrix} I_{\rho_+} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{\rho_-} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{\rho_0} \end{vmatrix}\,.$$

Per gli interi ρ_+, ρ_- e ρ_0 possiamo ragionare come segue: ρ_0 deve essere $n - r$ perché questa è in particolare una matrice associata a $b(\,,\,)$ e quindi deve avere rango r. Quindi $\rho_- = r - \rho_+$ e ragionando come nella dimostrazione originale del Teorema di Sylvester (quella con il Teorema Spettrale) possiamo dimostrare, procedendo per assurdo, che ρ_+ dipende solo da $b(\,,\,)$.

Esercizio. (i) Determinare indici di positività, negatività e nullità di $b(\underline{x}, \underline{y}) = x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2\,.$
(ii) Determinare una base di Sylvester per $b(\,,\,)$.

Soluzione. Abbiamo già risolto l'esercizio utilizzando il teorema spettrale. Vediamo ora come risolverlo *à la* Sylvester.
Il metodo si basa sulla costruzione induttiva di una base diagonalizzante, prendendo in esame vettori non-isotropi. Ovviamente i vettori nel nucleo di $b(\ ,\ )$, $V^{\perp_b}$, non sono mai non-isotropi, dato che sono b-ortogonali a *tutti* i vettori di V. Il primo passo in questa soluzione dell'esercizio consiste quindi nel trovare il nucleo di $b(\ ,\ )$ e nel fissare una base di questo nucleo; gli altri vettori della base di Sylvester, quelli non-isotropi, andranno cercati *fuori* dal nucleo. Sappiamo che il nucleo $V^{\perp_b}$ è dato da Ker$A$, con

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

la matrice associata a $b(\ ,\ )$ nella base canonica. Chiaramente Ker$A$ ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

e quindi

$$\mathrm{Ker}A = \mathrm{Span}((-1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)).$$

Poniamo $\underline{g}_3 = (-1, 1, 0, 0)\,, \underline{g}_4 = (0, 0, 0, 1)$ [1]. Che questi vettori siano ortogonali nel prodotto scalare canonico (quello definito positivo) non ci interessa; in questa soluzione non si utilizzano nozioni metriche. A questo punto possiamo iniziare il procedimento induttivo, fissando un vettore non-isotropo fuori da Ker$A$. Il vettore $(1, 1, 1, 0)$ non appartiene al nucleo, perché non ne soddisfa le equazioni, ed è non isotropo, perché

$$b((1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0)) = 4 \neq 0$$

Poniamo $\underline{g}_1 = (1, 1, 1, 0)$. Ora cerchiamo $\underline{g}_2$ non-isotropo in $(\mathbb{R}\underline{g}_1)^{\perp_b}$. Si ha,

$$(\mathbb{R}\underline{g}_1)^{\perp_b} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid b((\underline{x}, \underline{g}_1,) = 0\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid b(\underline{x}, (1, 1, 1, 0)) = 0\} =$$

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid (1, 1, 1, 0)^T \cdot A \cdot \underline{x} = 0\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid (1, 1, 1, 0)^T \cdot \begin{vmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_1 + x_2 \\ 0 \end{vmatrix} = 0\}$$

Quindi $(\mathbb{R}\underline{g}_1)^{\perp_b}$ è costituito dai vettori $\underline{x} \in \mathbb{R}^4$ che soddisfano l' equazione

$$2x_3 + x_1 + x_2 = 0$$

Il vettore $(1, 1, -1, 0)$ soddisfa quest'equazione; inoltre non soddisfa le equazioni cartesiane del nucleo e quindi non appartiene al nucleo; infine, non è un vettore isotropo perché

$$b((1, 1, -1, 0), (1, 1, -1, 0)) = -4 \neq 0\,.$$

Conclusione: la base

$$\mathcal{G} = \{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3, \underline{g}_4\}$$

---

[1] li ordiniamo cosi' perché usualmente i vettori del nucleo sono messi in ultima pozione

è una base diagonalizzante, con matrice associata

$$A_b^{\mathcal{G}} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Una base di Sylvester è data da

$$\mathcal{F} = \{\underline{f}_1 := \frac{1}{2}\underline{g}_1, \underline{f}_2 := \frac{1}{2}\underline{g}_2, \underline{f}_3 := \underline{g}_3, \underline{f}_4 := \underline{g}_4\}$$

ed ha matrice associata

$$A_b^{\mathcal{F}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

come deve essere.