**Corso di Laurea in Matematica. Geometria 1. a.a. 2019-20.**
**Prof. P. Piazza**
**Note sul teorema spettrale.**

Sia $V$ uno spazio vettoriale reale e supponiamo che sia definito in $V$ un prodotto scalare $<\,,\,>$. La coppia $(V, <\,,\,>)$ è, per definizone, uno spazio vettoriale euclideo.

**Definizione.** Sia $T : V \to V$ un endomorfismo. Diremo che $T$ è simmetrico se

$$< T\underline{v}, \underline{w} >=< \underline{v}, T\underline{w} > \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$$

Sappiamo che dato $T \in \mathrm{End}(V)$ esiste un unico operatore $T^t \in \mathrm{End}(V)$, detto operatore aggiunto di $T$, tale che

$$< T\underline{v}, \underline{w} >=< \underline{v}, T^t\underline{w} > \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$$

È allora chiaro che $T$ è simmetrico se e solo se $T = T^t$; per questo motivo trovate nella letteratura la dizione " autoaggiunto " al posto di " simmetrico ".

La definizione di operatore simmetrico è molto generale e può essere data anche per spazi vettoriali euclidei di dimensione infinita. Vediamo un esempio.

**Esempio 1.** Sia $V$ lo spazio vettoriale delle funzioni reali $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infinitamente derivabili e periodiche di periodo $2\pi$ (tali cioè che $f(x) = f(x + 2\pi)$ $\forall x \in \mathbb{R}$). Sia $<\,,\,>$ l'applicazione da $V \times V \to \mathbb{R}$ definita da

$$< f, g >= \int_0^{2\pi} fg dx$$

Abbiamo già verificato a lezione che quest'applicazione è simmetrica, bilineare e definita positiva. Essa definisce quindi un prodotto scalare in $V$. Consideriamo l'operatore $T$ definito da

$$Tf = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

In parole $T$ associa ad ogni funzione la sua derivata seconda. Innanzitutto $T$ è lineare (per le proprietà della derivata); inoltre è ben definito come operatore lineare da $V$ in $V$ (perché la derivata di una funzione periodica è a sua volta periodica, basta calcolare la derivata in $x_0$ e $x_0 + 2\pi$ come limite del rapporto incrementale). Infine $T$ **è simmetrico**; lo verifichiamo utilizzando la formula di integrazione per parti e l'ipotesi di periodicità. Per definizione

$$< Tf, g >= \int_0^{2\pi} \frac{d^2 f}{dx^2} g dx\,;$$

ora utilizziamo l'integrazione per parti ed otteniamo per il membro a destra:

$$-\int_0^{2\pi} \frac{df}{dx}\frac{dg}{dx} + \int_0^{2\pi} \frac{d}{dx}(\frac{df}{dx}g)dx = -\int_0^{2\pi} \frac{df}{dx}\frac{dg}{dx}dx + (\frac{df}{dx})(2\pi)g(2\pi) - (\frac{df}{dx})(0)g(0)$$

Ma dall'ipotesi di periodicità otteniamo

$$(\frac{df}{dx})(2\pi)g(2\pi) - (\frac{df}{dx})(0)g(0) = 0$$

e quindi, in definitiva

$$< Tf, g >= -\int_0^{2\pi} \frac{df}{dx}\frac{dg}{dx}dx$$

Ma ora riapplichiamo l'integrazione per parti al membro a destra ottenendo infine

$$< Tf, g >= -\left(-\int_0^{2\pi} f\frac{d^2g}{dx^2}dx\right) = \int_0^{2\pi} f\frac{d^2g}{dx^2}dx =< f, Tg >$$

che era quello che dovevamo verificare.
L'operatore $T$ è un operatore studiatissimo; prende il nome di Laplaciano (in dimensione 1).
**Esempio 2.** Sia $V = \mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare canonico che denotiamo qui $\bullet$. Osserviamo che

$$\underline{x} \bullet \underline{y} = \underline{x}^T\underline{y} (= \underline{y}^T\underline{x})$$

dove a destra dell'uguaglianza c'è il prodotto righe per colonne. Sia $A$ una matrice simmetrica. Allora $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un operatore simmetrico. Infatti

$$L_A\underline{x} \bullet \underline{y} = A\underline{x} \bullet \underline{y} = (A\underline{x})^T\underline{y}$$
$$= (\underline{x}^TA^T)\underline{y} = (\underline{x}^TA)\underline{y} = \underline{x}^T(A\underline{y}) = \underline{x} \bullet L_A\underline{y}$$

Supponiamo ora che $(V, <\,,\,>)$ sia uno spazio vettoriale euclideo di dimensione *finita.*
**Proposizione.** *$T$ è simmetrico se e solo se la matrice associata a $T$ in una base ortonormale, $A$, è simmetrica.*
**Dimostrazione.** Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ la nostra base ortonormale. Stiamo scegliendo questa base come base di partenza e base di arrivo. Quindi

$$A := M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)\,.$$

La proposizione segue subito dal fatto generale che

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T^t) = (M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T))^t$$

($\mathcal{B}$ è ortonormale per ipotesi) e dall'ipotesi che $T = T^t$.
Volendo procedere direttamente, senza utilizzare questa proprietà generale:
$T$ simmetrico vuol dire che $< T\underline{v}, \underline{w} >=< \underline{v}, T\underline{w} > \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$, che è equivalente a richiedere che

$$A\underline{x} \bullet \underline{y} = \underline{x} \bullet A\underline{y} \ \ \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n\,. \tag{1}$$

Infatti la base $\mathcal{B}$ è ortonormale e quindi $< \underline{u}, \underline{u}' >= \underline{x} \bullet \underline{x}'$ se $\underline{u}$ ha coordinate $\underline{x}$ e $\underline{u}'$ ha coordinate $\underline{x}'$.
Ma a sinistra di (1) c' è $(A\underline{x})^T\underline{y}$ che è anche uguale a $\underline{x}^TA^T\underline{y}$, e a destra c'è $\underline{x}^TA\underline{y}$. Quindi $T$ è simmetrico se e solo

$$\underline{x}^TA^T\underline{y} = \underline{x}^TA\underline{y} \ \ \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

e questo è vero se e solo se $A = A^T$.
**Teorema spettrale per operatori simmetrici.**
*Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita. Sia $T : V \to V$ un operatore simmetrico. Allora esiste una base ortonormale di $V$ costituita da autovettori di $T$.*
**Dimostrazione.** Per induzione su $n = \dim V$. Per $n = 1$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo vero il teorema per spazi vettoriali euclidei di dimensione $n-1$ e dimostriamolo per quelli di dimensione $n$.
Fissiamo una qualsiasi base ortonormale di $V$; la matrice associata a $T$ in questa base è simmetrica. Vale il seguente

**Lemma.** *Le radici del polinomio caratteristico associato ad una matrice reale simmetrica $A$ sono tutte reali.*

**Dimostrazione del Lemma.** Consideriamo $P_A(\lambda)$, un polinomio di grado $n$ in $\lambda$ a coefficienti reali. Per il teorema fondamentale dell'algebra $P_A(\lambda)$ ammette $n$ radici complesse contate con la loro molteplicità. Sia $\lambda$ una tale radice complessa; dobbiamo dimostrare che $\lambda \in \mathbb{R}$ o, equivalentemente, che $\lambda$ coincide con il suo complesso coniugato, in formule $\lambda = \overline{\lambda}$. Consideriamo $L_A^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, l'operatore lineare che manda $\underline{z}$ in $A\underline{z}$. Il polinomio caratteristico di questo endomorfismo è ovviamente ancora $P_A(\lambda)$. Sappiamo allora che esiste un autovettore $\underline{\zeta} \in \mathbb{C}^n$, $\underline{\zeta} \neq \underline{0}$, associato alla radice $\lambda$ (perché $\lambda$ è un autovalore per $L_A^{\mathbb{C}}$). Quindi $L_A^{\mathbb{C}}\underline{\zeta} = \lambda\underline{\zeta}$ che riscriviamo semplicemente come

$$A \left| \begin{matrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{matrix} \right| = \lambda \left| \begin{matrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{matrix} \right| \tag{2}$$

Prendiamo ora il complesso coniugato di ambo i membri; dato che $A$ è reale otteniamo

$$A \left| \begin{matrix} \overline{\zeta_1} \\ \overline{\zeta_2} \\ \vdots \\ \overline{\zeta_n} \end{matrix} \right| = \overline{\lambda} \left| \begin{matrix} \overline{\zeta_1} \\ \overline{\zeta_2} \\ \vdots \\ \overline{\zeta_n} \end{matrix} \right| \tag{3}$$

Consideriamo ora lo scalare

$$\left| \begin{matrix} \overline{\zeta_1} & \overline{\zeta_2} & \dots & \overline{\zeta_n} \end{matrix} \right| A \left| \begin{matrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{matrix} \right| \tag{4}$$

e riscriviamolo in due modi diversi utilizzando l'associatività del prodotto righe per colonne. Primo modo: utilizziamo (2) e riscriviamo (4) come

$$\begin{aligned} \left| \begin{matrix} \overline{\zeta_1} & \overline{\zeta_2} & \dots & \overline{\zeta_n} \end{matrix} \right| \left( A \left| \begin{matrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{matrix} \right| \right) &= \left| \begin{matrix} \overline{\zeta_1} & \overline{\zeta_2} & \dots & \overline{\zeta_n} \end{matrix} \right| \left( \lambda \left| \begin{matrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{matrix} \right| \right) \\ &= \lambda(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + \cdots + |\zeta_n|^2) \end{aligned} \tag{5}$$

perché se $z = a + ib \in \mathbb{C}$ allora $\overline{z}z = a^2 + b^2 := |z|^2$.
Secondo modo: utilizziamo (3), l'ipotesi $A = A^t$ e riscriviamo (4) come

$$
\begin{aligned}
(\left|\begin{matrix}\overline{\zeta_1} & \overline{\zeta_2} & \dots & \overline{\zeta_n}\end{matrix}\right| A)\left|\begin{matrix}\zeta_1\\ \zeta_2\\ \vdots\\ \zeta_n\end{matrix}\right| &= (A\left|\begin{matrix}\overline{\zeta_1}\\ \overline{\zeta_2}\\ \vdots\\ \overline{\zeta_n}\end{matrix}\right|)^t\left|\begin{matrix}\zeta_1\\ \zeta_2\\ \vdots\\ \zeta_n\end{matrix}\right| \\
&= (\overline{\lambda}\left|\begin{matrix}\overline{\zeta_1}\\ \overline{\zeta_2}\\ \vdots\\ \overline{\zeta_n}\end{matrix}\right|)^t\left|\begin{matrix}\zeta_1\\ \zeta_2\\ \vdots\\ \zeta_n\end{matrix}\right| = \overline{\lambda}(|\zeta_1|^2+|\zeta_2|^2+\cdots+|\zeta_n|^2)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Eguagliando i membri a destra otteniamo

$$\lambda(|\zeta_1|^2+|\zeta_2|^2+\cdots+|\zeta_n|^2) = \overline{\lambda}(|\zeta_1|^2+|\zeta_2|^2+\cdots+|\zeta_n|^2)$$

e dato che $|\zeta_1|^2+|\zeta_2|^2+\cdots+|\zeta_n|^2 \neq 0$ abbiamo $\lambda = \overline{\lambda}$ che è quello che dovevamo dimostrare.

**Fine dimostrazione lemma.**

Applichiamo questo Lemma al polinomio caratteristico di $T$, scritto rispetto alla base ortonormale fissata. Sappiamo dal Lemma che esiste un autovalore reale, sia esso $\lambda$; sia $\underline{e}_1$ un autovettore associato a tale autovalore. Possiamo assumere che $||\underline{e}_1|| = 1$. Consideriamo ora $W = (\mathbb{R}\underline{e}_1)^\perp$. *Osservazione fondamentale:* il sottospazio $W$ è invariante per $T$ [1]. Dimostriamo questa proprietà fondamentale: sia $\underline{w} \in W$; dobbiamo verificare che $T\underline{w} \in W$ e cioè che $< T\underline{w}, \underline{e}_1 >= 0$; ma $< T\underline{w}, \underline{e}_1 >=< \underline{w}, T\underline{e}_1 >$ per l'ipotesi che $T$ è simmetrico e $T\underline{e}_1 = \lambda\underline{e}_1$ perché $\underline{e}_1$ è un autovettore associato a $\lambda$; quindi, per bilinearità, $< T\underline{w}, \underline{e}_1 >= \lambda < \underline{w}, \underline{e}_1 >$ che è uguale a zero dato che $\underline{w} \in W = (\mathbb{R}\underline{e}_1)^\perp$. Quindi $W$ è invariante. Ha senso quindi considerare la restrizione di $T$ a questo sottospazio

$$T|_W : W \to W\,;$$

questo è quindi un endomorfismo dello spazio vettoriale $W$ ed è bene notare che $W$ ha dimensione $n-1$ con $n = \dim V$. Il prodotto scalare $<,>$ definisce per restrizione un'applicazione $W \times W \to \mathbb{R}$ che è ovviamente ancora bilineare, simmetrica e definita positiva. $W$ è quindi esso stesso uno spazio vettoriale con prodotto scalare , cioè uno spazio vettoriale euclideo [2]; l'operatore $T|_W : W \to W$ è ovviamente simmetrico rispetto a questo prodotto scalare in $W$ [3]. Ma $W$ ha dimensione $n-1$ e quindi, per ipotesi induttiva, $W$ ammette una base ortonormale $\underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ costituita da autovettori per $T|_W$; è ora chiaro che $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ è una base ortonormale di $V$ costituita da autovettori per $T$. Il teorema è dimostrato.

---

[1] dove un sottospazio $W$ di $V$ è detto invariante per un endomorfismo $T$ se $T(W)$ è contenuto in $W$. Questa è una proprietà particolare del sottospazio; in generale l'immagine tramite $T$ di un sottospazio $W$ è un sottospazio diverso da $W$ (pensate ad una rotazione $T$ di $\pi/2$ in $\mathbb{R}^2$ e a $W$ uguale a una qualsiasi retta)

[2] ciò è vero per ogni sottospazio di $V$

[3] la formula $< T\underline{v}\,\underline{w} >=< \underline{v}, T\underline{w} >$ è verificata *per ogni* $\underline{v}, \underline{w} \in V$, in particolare per i vettori di $W$ !