Corso di Laurea in Matematica. Geometria 1. a.a. 2017-18.
Prof. P. Piazza
Note sul teorema spettrale.

Sia V uno spazio vettoriale reale e supponiamo che sia definito in V un prodotto scalare $<\,,\,>$. La coppia $(V, <\,,\,>)$ è, per definizone, uno spazio vettoriale euclideo.

Definizione. Sia $T : V \to V$ un endomorfismo. Diremo che T è simmetrico se

$$< T\underline{v}, \underline{w} > = < \underline{v}, T\underline{w} > \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$$

Sappiamo che dato $T \in \text{End}(V)$ esiste un unico operatore $T^t \in \text{End}(V)$, detto operatore aggiunto di T, tale che

$$< T\underline{v}, \underline{w} > = < \underline{v}, T^t\underline{w} > \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$$

È allora chiaro che T è simmetrico se e solo se $T = T^t$; per questo motivo trovate nella letteratura la dizione " autoaggiunto " al posto di " simmetrico ".

La definizione di operatore simmetrico è molto generale e può essere data anche per spazi vettoriali euclidei di dimensione infinita. Vediamo un esempio.

Esempio 1. Sia V lo spazio vettoriale delle funzioni reali $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infinitamente derivabili e periodiche di periodo 2π (tali cioè che $f(x) = f(x + 2\pi)$ $\forall x \in \mathbb{R}$). Sia $<\,,\,>$ l'applicazione da $V \times V \to \mathbb{R}$ definita da

$$< f, g > = \int_0^{2\pi} fg dx$$

Abbiamo già verificato a lezione che quest'applicazione è simmetrica, bilineare e definita positiva. Essa definisce quindi un prodotto scalare in V. Consideriamo l'operatore T definito da

$$Tf = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

In parole T associa ad ogni funzione la sua derivata seconda. Innanzitutto T è lineare (per le proprietà della derivata); inoltre è ben definito come operatore lineare da V in V (perché la derivata di una funzione periodica è a sua volta periodica, basta calcolare la derivata in x_0 e $x_0 + 2\pi$ come limite del rapporto incrementale). Infine T **è simmetrico**; lo verifichiamo utilizzando la formula di integrazione per parti e l'ipotesi di periodicità. Per definizione

$$< Tf, g > = \int_0^{2\pi} \frac{d^2 f}{dx^2} g dx\,;$$

ora utilizziamo l'integrazione per parti ed otteniamo per il membro a destra:

$$-\int_0^{2\pi} \frac{df}{dx}\frac{dg}{dx} + \int_0^{2\pi} \frac{d}{dx}(\frac{df}{dx}g)dx = -\int_0^{2\pi} \frac{df}{dx}\frac{dg}{dx}dx + (\frac{df}{dx})(2\pi)g(2\pi) - (\frac{df}{dx})(0)g(0)$$

Ma dall'ipotesi di periodicità otteniamo

$$(\frac{df}{dx})(2\pi)g(2\pi) - (\frac{df}{dx})(0)g(0) = 0$$

e quindi, in definitiva

$$< Tf, g > = -\int_0^{2\pi} \frac{df}{dx}\frac{dg}{dx}dx$$

Ma ora riapplichiamo l'integrazione per parti al membro a destra ottenendo infine

$$< Tf, g >= -\left(-\int_0^{2\pi} f\frac{d^2g}{dx^2}dx\right) = \int_0^{2\pi} f\frac{d^2g}{dx^2}dx =< f, Tg >$$

che era quello che dovevamo verificare.
L'operatore T è un operatore studiatissimo; prende il nome di Laplaciano (in dimensione 1).
Esempio 2. Sia $V = \mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare canonico che denotiamo qui $\bullet$. Osserviamo che

$$\underline{x} \bullet \underline{y} = \underline{x}^T\underline{y}(= \underline{y}^T\underline{x})$$

dove a destra dell'uguaglianza c'è il prodotto righe per colonne. Sia A una matrice simmetrica. Allora $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un operatore simmetrico. Infatti

$$L_A\underline{x} \bullet \underline{y} = A\underline{x} \bullet \underline{y} = (A\underline{x})^T\underline{y}$$
$$= (\underline{x}^T A^T)\underline{y} = (\underline{x}^T A)\underline{y} = \underline{x}^T(A\underline{y}) = \underline{x} \bullet L_A\underline{y}$$

Supponiamo ora che $(V, < , >)$ sia uno spazio vettoriale euclideo di dimensione *finita.*
Proposizione. *T è simmetrico se e solo se la matrice associata a T in una base ortonormale, A, è simmetrica.*
Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ la nostra base ortonormale. Stiamo scegliendo questa base come base di partenza e base di arrivo. Quindi

$$A := M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)\,.$$

La proposizione segue subito dal fatto generale che

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T^t) = (M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T))^t$$

($\mathcal{B}$ è ortonormale per ipotesi) e dall'ipotesi che $T = T^t$.
Volendo procedere direttamente, senza utilizzare questa proprietà generale:
T simmetrico vuol dire che $< T\underline{v}, \underline{w} >=< \underline{v}, T\underline{w} > \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$, che è equivalente a richiedere che

$$A\underline{x} \bullet \underline{y} = \underline{x} \bullet A\underline{y} \;\; \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n\,. \tag{1}$$

Infatti la base $\mathcal{B}$ è ortonormale e quindi $< \underline{u}, \underline{u}' >= \underline{x} \bullet \underline{x}'$ se $\underline{u}$ ha coordinate $\underline{x}$ e $\underline{u}'$ ha coordinate $\underline{x}'$.
Ma a sinistra di (1) cè $(A\underline{x})^T\underline{y}$ che è anche uguale a $\underline{x}^TA^T\underline{y}$, e a destra c'è $\underline{x}^TA\underline{y}$. Quindi T è simmetrico se e solo

$$\underline{x}^TA^T\underline{y} = \underline{x}^TA\underline{y} \;\; \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

e questo è vero se e solo se $A = A^T$.
Teorema spettrale per operatori simmetrici.
Sia $(V, < , >)$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita. Sia $T : V \to V$ un operatore simmetrico. Allora esiste una base ortonormale di V costituita da autovettori di T.
Dimostrazione. Per induzione su $n = \dim V$. Per $n = 1$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo vero il teorema per spazi vettoriali euclidei di dimensione $n - 1$ e dimostriamolo per quelli di dimensione n.
Fissiamo una qualsiasi base ortonormale di V; la matrice associata a T in questa base è simmetrica. Vale il seguente

Lemma. *Le radici del polinomio caratteristico associato ad una matrice reale simmetrica A sono tutte reali.*

Dimostrazione del Lemma. Consideriamo $P_A(\lambda)$, un polinomio di grado n in λ a coefficienti reali. Per il teorema fondamentale dell'algebra $P_A(\lambda)$ ammette n radici complesse contate con la loro molteplicità. Sia λ una tale radice complessa; dobbiamo dimostrare che $\lambda \in \mathbb{R}$ o, equivalentemente, che λ coincide con il suo complesso coniugato, in formule $\lambda = \overline{\lambda}$. Consideriamo $L_A^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, l'operatore lineare che manda $\underline{z}$ in $A\underline{z}$. Il polinomio caratteristico di questo endomorfismo è ovviamente ancora $P_A(\lambda)$. Sappiamo allora che esiste un autovettore $\underline{\zeta} \in \mathbb{C}^n$, $\underline{\zeta} \neq \underline{0}$, associato alla radice λ (perché λ è un autovalore per $L_A^{\mathbb{C}}$). Quindi $L_A^{\mathbb{C}}\underline{\zeta} = \lambda\underline{\zeta}$ che riscriviamo semplicemente come

$$A \begin{vmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{vmatrix} \tag{2}$$

Prendiamo ora il complesso coniugato di ambo i membri; dato che A è reale otteniamo

$$A \begin{vmatrix} \overline{\zeta_1} \\ \overline{\zeta_2} \\ \vdots \\ \overline{\zeta_n} \end{vmatrix} = \overline{\lambda} \begin{vmatrix} \overline{\zeta_1} \\ \overline{\zeta_2} \\ \vdots \\ \overline{\zeta_n} \end{vmatrix} \tag{3}$$

Consideriamo ora lo scalare

$$\begin{vmatrix} \overline{\zeta_1} & \overline{\zeta_2} & \dots & \overline{\zeta_n} \end{vmatrix} A \begin{vmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{vmatrix} \tag{4}$$

e riscriviamolo in due modi diversi utilizzando l'associatività del prodotto righe per colonne. Primo modo: utilizziamo (2) e riscriviamo (4) come

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \overline{\zeta_1} & \overline{\zeta_2} & \dots & \overline{\zeta_n} \end{vmatrix} (A \begin{vmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{vmatrix}) &= \begin{vmatrix} \overline{\zeta_1} & \overline{\zeta_2} & \dots & \overline{\zeta_n} \end{vmatrix} (\lambda \begin{vmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{vmatrix}) \\ &= \lambda(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + \dots + |\zeta_n|^2) \end{aligned} \tag{5}$$

perché se $z = a + ib \in \mathbb{C}$ allora $\overline{z}z = a^2 + b^2 := |z|^2$.
Secondo modo: utilizziamo (3), l'ipotesi $A = A^t$ e riscriviamo (4) come

$$
\begin{aligned}
&(\left|\ \overline{\zeta_1}\quad \overline{\zeta_2}\quad \ldots\quad \overline{\zeta_n}\ \right| A)\left|\begin{matrix}\zeta_1\\ \zeta_2\\ \vdots\\ \zeta_n\end{matrix}\right| = (A\left|\begin{matrix}\overline{\zeta_1}\\ \overline{\zeta_2}\\ \vdots\\ \overline{\zeta_n}\end{matrix}\right|)^t\left|\begin{matrix}\zeta_1\\ \zeta_2\\ \vdots\\ \zeta_n\end{matrix}\right| \\
&= (\overline{\lambda}\left|\begin{matrix}\overline{\zeta_1}\\ \overline{\zeta_2}\\ \vdots\\ \overline{\zeta_n}\end{matrix}\right|)^t\left|\begin{matrix}\zeta_1\\ \zeta_2\\ \vdots\\ \zeta_n\end{matrix}\right| = \overline{\lambda}(|\zeta_1|^2+|\zeta_2|^2+\cdots+|\zeta_n|^2)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Eguagliando i membri a destra otteniamo

$$\lambda(|\zeta_1|^2+|\zeta_2|^2+\cdots+|\zeta_n|^2) = \overline{\lambda}(|\zeta_1|^2+|\zeta_2|^2+\cdots+|\zeta_n|^2)$$

e dato che $|\zeta_1|^2+|\zeta_2|^2+\cdots+|\zeta_n|^2 \neq 0$ abbiamo $\lambda = \overline{\lambda}$ che è quello che dovevamo dimostrare.

Fine dimostrazione lemma.

Applichiamo questo Lemma al polinomio caratteristico di T, scritto rispetto alla base ortonormale fissata. Sappiamo dal Lemma che esiste un autovalore reale, sia esso λ; sia $\underline{e}_1$ un autovettore associato a tale autovalore. Possiamo assumere che $||\underline{e}_1|| = 1$. Consideriamo ora $W = (\mathbb{R}\underline{e}_1)^\perp$. *Osservazione fondamentale:* il sottospazio W è invariante per T [1]. Dimostriamo questa proprietà fondamentale: sia $\underline{w} \in W$; dobbiamo verificare che $T\underline{w} \in W$ e cioè che $< T\underline{w}, \underline{e}_1 >= 0$; ma $< T\underline{w}, \underline{e}_1 >=< \underline{w}, T\underline{e}_1 >$ per l'ipotesi che T è simmetrico e $T\underline{e}_1 = \lambda\underline{e}_1$ perché $\underline{e}_1$ è un autovettore associato a λ; quindi, per bilinearità, $< T\underline{w}, \underline{e}_1 >= \lambda < \underline{w}, \underline{e}_1 >$ che è uguale a zero dato che $\underline{w} \in W = (\mathbb{R}\underline{e}_1)^\perp$. Quindi W è invariante. Ha senso quindi considerare la restrizione di T a questo sottospazio

$$T|_W : W \to W\,;$$

questo è quindi un endomorfismo dello spazio vettoriale W ed è bene notare che W ha dimensione $n-1$ con $n = \dim V$. Il prodotto scalare $<,>$ definisce per restrizione un'applicazione $W \times W \to \mathbb{R}$ che è ovviamente ancora bilineare, simmetrica e definita positiva. W è quindi esso stesso uno spazio vettoriale con prodotto scalare , cioè uno spazio vettoriale euclideo [2]; l'operatore $T|_W : W \to W$ è ovviamente simmetrico rispetto a questo prodotto scalare in W [3]. Ma W ha dimensione $n-1$ e quindi, per ipotesi induttiva, W ammette una base ortonormale $\underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ costituita da autovettori per $T|_W$; è ora chiaro che $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ è una base ortonormale di V costituita da autovettori per T. Il teorema è dimostrato.

---

[1] dove un sottospazio W di V è detto invariante per un endomorfismo T se $T(W)$ è contenuto in W. Questa è una proprietà particolare del sottospazio; in generale l'immagine tramite T di un sottospazio W è un sottospazio diverso da W (pensate ad una rotazione T di $\pi/2$ in $\mathcal{V}^2_O$ e a W uguale a una qualsiasi retta)

[2] ciò è vero per ogni sottospazio di V

[3] la formula $< T\underline{v}\,\underline{w} >=< \underline{v}, T\underline{w} >$ è verificata *per ogni* $\underline{v}, \underline{w} \in V$, in particolare per i vettori di W !