

Corso di Laurea in Matematica. Geometria 1. a.a. 2016-17.
Prof. P. Piazza
Note sul teorema spettrale.

Sia V uno spazio vettoriale reale e supponiamo che sia definito in V un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La coppia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ è uno spazio vettoriale euclideo.

Definizione. Sia $T : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Diremo che T è simmetrico se

$$\langle T\underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle \underline{v}, T\underline{w} \rangle \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$$

Questa definizione è molto generale e può essere data anche per spazi vettoriali euclidei di dimensione infinita.

Esempio 1. Sia V lo spazio vettoriale delle funzioni reali $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente derivabili e periodiche di periodo 2π (tali cioè che $f(x) = f(x + 2\pi) \forall x \in \mathbb{R}$). Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'applicazione da $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f g dx$$

Abbiamo già verificato a lezione che quest'applicazione è simmetrica, bilineare e definita positiva. Essa definisce quindi un prodotto scalare in V . Consideriamo l'operatore T definito da

$$Tf = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

In parole T associa ad ogni funzione la sua derivata seconda. Innanzitutto T è lineare (per le proprietà della derivata); inoltre è ben definito come operatore lineare da V in V (perché la derivata di una funzione periodica è a sua volta periodica, basta calcolare la derivata in x_0 e $x_0 + 2\pi$ come limite del rapporto incrementale). Infine T è **simmetrico**; lo verifichiamo utilizzando la formula di integrazione per parti e l'ipotesi di periodicità. Per definizione

$$\langle Tf, g \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{d^2 f}{dx^2} g dx;$$

ora utilizziamo l'integrazione per parti ed otteniamo per il membro a destra:

$$-\int_0^{2\pi} \frac{df}{dx} \frac{dg}{dx} + \int_0^{2\pi} \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} g \right) dx = -\int_0^{2\pi} \frac{df}{dx} \frac{dg}{dx} dx + \left(\frac{df}{dx} \right) (2\pi) g(2\pi) - \left(\frac{df}{dx} \right) (0) g(0)$$

Ma dall'ipotesi di periodicità otteniamo

$$\left(\frac{df}{dx} \right) (2\pi) g(2\pi) - \left(\frac{df}{dx} \right) (0) g(0) = 0$$

e quindi, in definitiva

$$\langle Tf, g \rangle = -\int_0^{2\pi} \frac{df}{dx} \frac{dg}{dx} dx$$

Ma ora riapplichiamo l'integrazione per parti al membro a destra ottenendo infine

$$\langle Tf, g \rangle = -\left(-\int_0^{2\pi} f \frac{d^2 g}{dx^2} dx \right) = \int_0^{2\pi} f \frac{d^2 g}{dx^2} dx = \langle f, Tg \rangle$$

che era quello che dovevamo verificare.

L'operatore T è un operatore studiatissimo; prende il nome di Laplaciano (in dimensione 1).

Esempio 2. Sia $V = \mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare canonico che denotiamo qui \bullet . Osserviamo che

$$\underline{x} \bullet \underline{y} = \underline{x}^T \underline{y} (= \underline{y}^T \underline{x})$$

dove a destra c'è il prodotto righe per colonne. Sia A una matrice simmetrica. Allora $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un operatore simmetrico. Infatti

$$\begin{aligned} L_A \underline{x} \bullet \underline{y} &= A \underline{x} \bullet \underline{y} = (A \underline{x})^T \underline{y} \\ &= (\underline{x}^T A^T) \underline{y} = (\underline{x}^T A) \underline{y} = \underline{x}^T (A \underline{y}) = \underline{x} \bullet L_A \underline{y} \end{aligned}$$

Supponiamo ora che (V, \langle, \rangle) sia uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita.

Proposizione. *La matrice A associata ad un operatore simmetrico in una base ortonormale è una matrice simmetrica.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una tale base ortonormale. Stiamo scegliendo questa base come base di partenza e base di arrivo. Quindi

$$A := M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(T).$$

Allora, per definizione di A si ha che

$$T \underline{v}_j = \sum_{\ell=1}^n a_{\ell j} \underline{v}_\ell ; \quad T \underline{v}_i = \sum_{k=1}^n a_{ki} \underline{v}_k.$$

Sappiamo per ipotesi che

$$\langle T \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = \langle \underline{v}_i, T \underline{v}_j \rangle$$

per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Ma a sinistra, per bilinearità ed utilizzando l'ortonormalità di \mathcal{B} , c'è a_{ji} mentre a destra, per lo stesso motivo, c'è a_{ij} . Quindi $a_{ij} = a_{ji}$ ed abbiamo finito.

Teorema spettrale per operatori simmetrici.

Sia (V, \langle, \rangle) uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita. Sia $T : V \rightarrow V$ un operatore simmetrico. Allora esiste una base ortonormale di V costituita da autovettori di T .

Dimostrazione. Per induzione su $n = \dim V$. Per $n = 1$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo vero il teorema per spazi vettoriali di dimensione $n - 1$ e dimostriamolo per quelli di dimensione n .

Fissiamo una qualsiasi base ortonormale di V ; la matrice associata a T in questa base è simmetrica. Vale il seguente

Lemma. *Le radici del polinomio caratteristico associato ad una matrice reale simmetrica A sono tutte reali.*

Dimostrazione del Lemma. Consideriamo $P_A(\lambda)$, un polinomio di grado n in λ a coefficienti reali. Per il teorema fondamentale dell'algebra $P_A(\lambda)$ ammette n radici complesse contate con la loro molteplicità. Sia λ una tale radice complessa; dobbiamo dimostrare che $\lambda \in \mathbb{R}$ o, equivalentemente, che λ coincide con il suo complesso coniugato, in formule $\lambda = \bar{\lambda}$. Consideriamo $L_A^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, l'operatore lineare che manda \underline{z} in $A \underline{z}$. Il polinomio caratteristico di questo endomorfismo è ovviamente ancora $P_A(\lambda)$. Sappiamo allora che esiste un autovettore $\underline{\zeta} \in \mathbb{C}^n$, $\underline{\zeta} \neq \underline{0}$,

associato alla radice λ (perché λ è un autovalore per $L_A^{\mathbb{C}}$). Quindi $L_A^{\mathbb{C}}\zeta = \lambda\zeta$ che riscriviamo semplicemente come

$$(1) \quad A \begin{vmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{vmatrix}$$

Prendiamo ora il complesso coniugato di ambo i membri; dato che A è reale otteniamo

$$(2) \quad A \begin{vmatrix} \bar{\zeta}_1 \\ \bar{\zeta}_2 \\ \vdots \\ \bar{\zeta}_n \end{vmatrix} = \bar{\lambda} \begin{vmatrix} \bar{\zeta}_1 \\ \bar{\zeta}_2 \\ \vdots \\ \bar{\zeta}_n \end{vmatrix}$$

Consideriamo ora lo scalare

$$(3) \quad \begin{vmatrix} \bar{\zeta}_1 & \bar{\zeta}_2 & \dots & \bar{\zeta}_n \end{vmatrix} A \begin{vmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{vmatrix}$$

e riscriviamolo in due modi diversi utilizzando l'associatività del prodotto righe per colonne. Primo modo: utilizziamo (1) e riscriviamo (3) come

$$(4) \quad \begin{vmatrix} \bar{\zeta}_1 & \bar{\zeta}_2 & \dots & \bar{\zeta}_n \end{vmatrix} (A \begin{vmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{vmatrix}) = \begin{vmatrix} \bar{\zeta}_1 & \bar{\zeta}_2 & \dots & \bar{\zeta}_n \end{vmatrix} (\lambda \begin{vmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{vmatrix}) \\ = \lambda(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + \dots + |\zeta_n|^2)$$

perché se $z = a + ib \in \mathbb{C}$ allora $\bar{z}z = a^2 + b^2 := |z|^2$.

Secondo modo: utilizziamo (2), l'ipotesi $A = A^t$ e riscriviamo (3) come

$$(5) \quad \begin{vmatrix} \bar{\zeta}_1 & \bar{\zeta}_2 & \dots & \bar{\zeta}_n \end{vmatrix} A \begin{vmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{vmatrix} = (A \begin{vmatrix} \bar{\zeta}_1 \\ \bar{\zeta}_2 \\ \vdots \\ \bar{\zeta}_n \end{vmatrix})^t \begin{vmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{vmatrix} \\ = (\bar{\lambda} \begin{vmatrix} \bar{\zeta}_1 \\ \bar{\zeta}_2 \\ \vdots \\ \bar{\zeta}_n \end{vmatrix})^t \begin{vmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{vmatrix} = \bar{\lambda}(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + \dots + |\zeta_n|^2)$$

Eguagliando i membri a destra otteniamo

$$\lambda(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + \dots + |\zeta_n|^2) = \bar{\lambda}(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + \dots + |\zeta_n|^2)$$

e dato che $|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + \dots + |\zeta_n|^2 \neq 0$ abbiamo $\lambda = \bar{\lambda}$ che è quello che dovevamo dimostrare.

Fine dimostrazione lemma.

Applichiamo questo Lemma al polinomio caratteristico di T , scritto rispetto alla base ortonormale fissata. Sappiamo dal Lemma che esiste un autovalore reale, sia esso λ ; sia \underline{e}_1 un autovettore associato a tale autovalore. Possiamo assumere che $\|\underline{e}_1\| = 1$. Consideriamo ora $W = (\mathbb{R}\underline{e}_1)^\perp$. *Osservazione fondamentale:* il sottospazio W è invariante per T ¹. Dimostriamo questa proprietà fondamentale: sia $\underline{w} \in W$; dobbiamo verificare che $T\underline{w} \in W$ e cioè che $\langle T\underline{w}, \underline{e}_1 \rangle = 0$; ma $\langle T\underline{w}, \underline{e}_1 \rangle = \langle \underline{w}, T\underline{e}_1 \rangle$ per l'ipotesi che T è simmetrico e $T\underline{e}_1 = \lambda\underline{e}_1$ perché \underline{e}_1 è un autovettore associato a λ ; quindi, per bilinearità, $\langle T\underline{w}, \underline{e}_1 \rangle = \lambda \langle \underline{w}, \underline{e}_1 \rangle$ che è uguale a zero dato che $\underline{w} \in W = (\mathbb{R}\underline{e}_1)^\perp$. Quindi W è invariante. Ha senso quindi considerare la restrizione di T a questo sottospazio

$$T|_W : W \rightarrow W ;$$

questo è quindi un endomorfismo dello spazio vettoriale W ed è bene notare che W ha dimensione $n - 1$ con $n = \dim V$. Il prodotto scalare \langle , \rangle definisce per restrizione un'applicazione $W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ che è ovviamente ancora bilineare, simmetrica e definita positiva. W è quindi esso stesso uno spazio vettoriale con prodotto scalare, cioè uno spazio vettoriale euclideo²; l'operatore $T|_W : W \rightarrow W$ è ovviamente simmetrico rispetto a questo prodotto scalare in W ³. Ma W ha dimensione $n - 1$ e quindi, per ipotesi induttiva, W ammette una base ortonormale $\underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ costituita da autovettori per $T|_W$; è ora chiaro che $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ è una base ortonormale di V costituita da autovettori per T . Il teorema è dimostrato.

¹dove un sottospazio W di V è detto invariante per un endomorfismo T se $T(W)$ è contenuto in W . Questa è una proprietà particolare del sottospazio; in generale l'immagine tramite T di un sottospazio W è un sottospazio diverso da W (pensate ad una rotazione T di $\pi/2$ in \mathcal{V}_O^2 e a W uguale a una qualsiasi retta)

²ciò è vero per ogni sottospazio di V

³la formula $\langle T\underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle \underline{v}, T\underline{w} \rangle$ è verificata per ogni $\underline{v}, \underline{w} \in V$, in particolare per i vettori di W !