Una volta stabilito che per ogni funzione continua f l'equazione (4.23) è risolubile, ci interessa determinarne l'integrale generale. La struttura dell'insieme delle soluzioni è descritta nel seguente teorema.

Teorema 4.27. *Siano y_1 e y_2 due soluzioni dell'equazione* (4.23). *Allora la funzione $y = y_1 - y_2$ è soluzione dell'equazione omogenea $ay'' + by' + cy = 0$, che chiameremo equazione omogenea associata alla* (4.23).

Dimostrazione. Il risultato è conseguenza della proprietà di linearità sia dell'operazione di derivazione che dell'equazione differenziale. Infatti si ha $y' = y_1' - y_2'$, $y'' = y_1'' - y_2''$ e
$ay'' + by' + cy = ay_1'' + by_1' + cy_1 - (ay_2'' + by_2' + cy_2) = f(x) - f(x) = 0.$ □

Il teorema precedente ci dice che ogni soluzione dell'equazione (4.23) ha la forma

$$\boxed{y(x) = \varphi(x) + \overline{y}(x)\,,} \qquad \begin{pmatrix}\text{integrale generale}\\ \text{di (4.23)}\end{pmatrix}$$

dove $\varphi(x)$ è una particolare soluzione di (4.23) e $\overline{y}(x)$ appartiene all'integrale generale dell'equazione omogenea associata.

Quindi l'integrale generale dell'equazione non omogenea (4.23) è completamente determinato se si conoscono

1) l'integrale generale dell'equazione omogenea associata;

2) una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

Il punto 1) è completamente risolto attraverso le tecniche descritte nel paragrafo precedente.
Il punto 2) è di non facile soluzione, in generale. Tuttavia in alcuni casi si può applicare quello che chiameremo **metodo di somiglianza**, cioè è possibile determinare una soluzione particolare $\varphi(x)$ che ha una forma simile a quella di $f(x)$.

***f* polinomio:** se $f(x)$ è un polinomio di grado n si può tentare di vedere se è possibile determinare una soluzione particolare dell'equazione differenziale che sia anch'essa un polinomio di grado n.

Ad esempio, determiniamo l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y = x^2\,.$$

Per prima cosa dobbiamo determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 1 = 0$ che non ha soluzioni reali. Siamo nel terzo caso discusso nel paragrafo precedente, con $\alpha = 0$ e $\beta = 1$. L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è quindi

$$\overline{y}(x) = A\cos x + B\sin x\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare della forma $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$ (generico polinomio di secondo grado). Abbiamo $\varphi'(x) = 2ax+b$ e $\varphi''(x) = 2a$. Imponiamo che φ sia soluzione dell'equazione:

$$2a + ax^2 + bx + c = x^2\,,$$

che è un'identità solo se

$$a = 1\,, \quad b = 0\,, \quad 2a + c = 0\,,$$

cioè per $a = 1$, $b = 0$ e $c = -2$. Quindi la soluzione particolare è $\varphi(x) = x^2 - 2$ e l'integrale generale è

$$y(x) = A\cos x + B\sin x + x^2 - 2\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Proviamo ora a fare lo stesso con l'equazione differenziale

$$y'' - 3y' = x^2 + 1\,. \tag{4.24}$$

Questa volta l'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 3\lambda = 0$ che ha due soluzioni reali $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 3$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$\overline{y}(x) = A + Be^{3x}\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Come prima, cerchiamo la soluzione particolare della forma $\varphi(x) = ax^2+bx+c$. Affinché sia soddisfatta l'equazione dovrà essere

$$2a - 3(2ax + b) = x^2 + 1\,,$$

cosa che chiaramente non sarà mai verificata (abbiamo a sinistra un polinomio di primo grado e vorremmo che coincidesse con un polinomio di secondo grado).

Questa è una difficoltà di ordine generale che si incontra tutte le volte che nell'equazione differenziale non compare la funzione y, ma solo le sue derivate. Infatti, se f è un polinomio di grado k e si cerca una soluzione particolare φ che sia un polinomio di grado k, l'assenza del termine y nell'equazione fa in modo che a sinistra dell'uguale appaia sempre un polinomio di grado al più $k - 1$. In questo caso è quindi necessario cercare la soluzione particolare φ come un polinomio di grado $k + 1$.

Torniamo all'equazione (4.24) e proviamo a cercare φ della forma $\varphi(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Ora abbiamo $\varphi'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ e $\varphi''(x) = 6ax + 2b$ e l'equazione sarà verificata se

$$6ax + 2b - 3(3ax^2 + 2bx + c) = x^2 + 1\,,$$

che risulta essere un'identità se

$$-9a = 1\,, \quad 6a - 6b = 0\,, \quad 2b - 3c = 1\,,$$

ossia per $a = -1/9$, $b = -1/9$ e $c = -11/27$. Non abbiamo ottenuto nessuna condizione sulla costante d, che può essere scelta arbitrariamente, ad esempio $d = 0$. Quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$y(x) = A + Be^{3x} - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{11}{27}x\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

***f* esponenziale:** se abbiamo $f(x) = C_0 e^{\alpha x}$, $C_0 \in \mathbb{R}$, possiamo cercare una soluzione particolare della forma $\varphi(x) = C(x)e^{\alpha x}$ dove la funzione $C(x)$ va determinata attraverso l'equazione differenziale. Infatti, poiché

$$\varphi'(x) = C'(x)e^{\alpha x} + C(x)\alpha e^{\alpha x}$$
$$\varphi''(x) = C''(x)e^{\alpha x} + 2C'(x)\alpha e^{\alpha x} + C(x)\alpha^2 e^{\alpha x}\,,$$

affinché φ sia soluzione di

$$ay'' + by' + c = C_0 e^{\alpha x}\,,$$

deve essere verificata l'identità

$$[a(C'' + 2\alpha C' + \alpha^2 C) + b(C' + \alpha C) + cC]e^{\alpha x} = C_0 e^{\alpha x}\,,$$

che può essere riscritta, dopo le dovute semplificazioni, come

$$aC'' + (2a\alpha + b)C' + (a\alpha^2 + b\alpha + c)C = C_0\,.$$

Ora abbiamo tre possibilità:

1) α non è soluzione dell'equazione caratteristica (ossia $a\alpha^2 + b\alpha + c \neq 0$). In questo caso è sufficiente scegliere C costante ($C'(x) = C''(x) = 0$), $C = \frac{C_0}{a\alpha^2 + b\alpha + c}$.

2) α è soluzione semplice dell'equazione caratteristica (ossia $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, ma $2a\alpha + b \neq 0$). In questo caso basta prendere $C = \frac{C_0}{a\alpha + b}x$, in modo da avere $C''(x) = 0$ e l'identità verificata.

3) α è soluzione doppia dell'equazione caratteristica (ossia $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ e $2a\alpha+b=0$). In questo caso deve essere verificata l'equazione $aC''=C_0$, quindi con una doppia integrazione si ottiene $C(x)=\frac{C_0}{a}\frac{x^2}{2}$.

Esempio 4.28. Determiniamo la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''-2y'+y=3e^{-x} \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1\,. \end{cases}$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2-2\lambda+1=0$, che è risolta solo da $\lambda=1$. Quindi siamo nel secondo caso descritto nel paragrafo precedente e l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$\overline{y}(x)=Ae^x+Bxe^x\,,\qquad A,B\in\mathbb{R}\,.$$

Determiniamo la soluzione particolare. Poiché $\alpha=-1$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, possiamo cercare la soluzione della forma $\varphi(x)=Ce^{-x}$ con C costante da determinare. Dal momento che $\varphi'(x)=-Ce^{-x}$ e $\varphi''(x)=Ce^{-x}$, imponendo che φ risolva l'equazione otteniamo $C+2C+C=3$, quindi $C=3/4$ e l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$y(x)=Ae^x+Bxe^x+\frac{3}{4}e^{-x}\,.$$

Ora (e, attenzione, solo ora) possiamo imporre le condizioni iniziali:

$$y(0)=A+\frac{3}{4}=0$$
$$y'(x)=Ae^x+Be^x+Bxe^x-\frac{3}{4}e^{-x}\quad\Longrightarrow\quad y'(0)=A+B-\frac{3}{4}=1$$

da cui si ottiene che $A=-\frac{3}{4}$, $B=\frac{5}{2}$ e la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x)=-\frac{3}{4}e^x+\frac{5}{2}xe^x+\frac{3}{4}e^{-x}\,.$$

***f* trigonometrica:** se abbiamo $f(x) = C_0 \cos(\alpha x)$ oppure $f(x) = C_0 \sin(\alpha x)$ $C_0 \in \mathbb{R}$, possiamo cercare una soluzione particolare della forma

$$\varphi(x) = C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x)\,,$$

dove le costanti C_1 e C_2 vanno determinate attraverso l'equazione differenziale. Se, ad esempio, vogliamo determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 2y' - 3y = -\sin(3x)\,,$$

come sempre prima determiniamo l'integrale generale dell'equazione omogenea associata che risulta essere

$$\overline{y}(x) = Ae^{-x} + Be^{3x}\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Per determinare la soluzione particolare, proviamo con $\varphi(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$. Abbiamo che

$$\varphi'(x) = -3C_1 \sin(3x) + 3C_2 \cos(3x)\,, \quad \varphi''(x) = -9C_1 \cos(3x) - 9C_2 \sin(3x)\,,$$

e quindi, affinché l'equazione sia verificata, dovrà essere

$$(-9C_1 - 6C_2 - 3C_1)\cos(3x) + (-9C_2 + 6C_1 - 3C_2)\sin(3x) = -\sin(3x)\,,$$

ossia

$$-12C_1 - 6C_2 = 0\,, \qquad -12C_2 + 6C_1 = -1\,,$$

da cui si ricava $C_1 = -\frac{1}{30}$ e $C_2 = \frac{1}{15}$. Quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale di partenza è

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^{3x} - \frac{1}{30}\cos(3x) + \frac{1}{15}\sin(3x)\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Facciamo notare esplicitamente che, se avessimo cercato una soluzione del tipo $\varphi(x) = C_1 \sin(3x)$ (ossia simile al termine $f(x)$) non la avremmo trovata. Questo perché, mentre nei due casi precedenti (polinomi ed esponenziali) avevamo funzioni che, dopo una o più derivazioni mantenevano la stessa struttura (qualsiasi derivata di un polinomio è un polinomio e qualsiasi derivata di un esponenziale è un esponenziale), in questo caso se si parte da una funzione trigonometrica (diciamo il seno) dopo una derivazione otteniamo l'altra (ossia il coseno). Quindi in questo caso il metodo di somiglianza può funzionare a patto di cercare soluzioni che siano combinazioni lineari di seno e coseno. Può tuttavia succedere che non sia possibile trovare una soluzione particolare della forma proposta (si veda l'Esempio 4.29), per motivi simili a quelli esposti nei casi precedenti.

Esempio 4.29 (Oscillazioni forzate). Consideriamo di nuovo l'oscillatore in assenza di attrito, ma questa volta facciamo intervenire una forza esterna $f(t) = \cos(\gamma t)$, $\gamma > 0$, che spinga la molla. L'equazione differenziale soddisfatta dal moto è

$$x'' + \omega^2 x = \cos(\gamma t)\,.$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è stato determinato nell'Esempio 4.25 ed è

$$\overline{x}(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, utilizzando il metodo di somiglianza. Sia $\varphi(t) = C_1\cos(\gamma t) + C_2\sin(\gamma t)$. Si ha

$$\varphi'(t) = -\gamma C_1\sin(\gamma t) + \gamma C_2\cos(\gamma t), \quad \varphi''(t) = -\gamma^2 C_1\cos(\gamma t) - \gamma^2 C_2\sin(\gamma t).$$

Sostituendo nell'equazione si ottiene

$$(\omega^2 - \gamma^2)(C_1\cos(\gamma t) + C_2\sin(\gamma t)) = \cos(\gamma t)\,,$$

che risulta risolubile se $\gamma \neq \omega$, con $C_2 = 0$ e $C_1 = 1/(\omega^2 - \gamma^2)$. Quindi se $\gamma \neq \omega$ l'integrale generale è

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + \frac{1}{\omega^2 - \gamma^2}\cos(\gamma t)\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Osserviamo che se γ e ω sono molto simili (ossia se la frequenza della forzante è molto simile alla frequenza propria dell'oscillatore), l'ampiezza dell'oscillazione è molto grande.

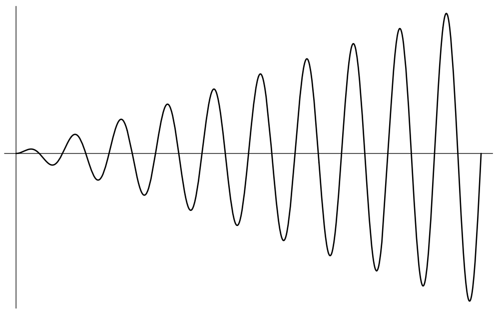

Figura 4.9: Risonanza

Si può verificare che nel caso limite $\gamma = \omega$ l'integrale generale è

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + \frac{1}{2\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{t}{2\omega}\sin(\omega t)\,,$$

quindi l'ampiezza delle oscillazioni cresce linearmente con il tempo (si veda la Figura 4.9). In questo caso si dice che l'oscillatore è in risonanza.

Qualche altro caso: il metodo di somiglianza descritto nei casi precedenti continua a funzionare quando $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$, $f(x) = P(x)\cos(\alpha x)$, oppure $f(x) = P(x)\sin(\alpha x)$, con P polinomio. Ad esempio, determiniamo la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = xe^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$. Abbiamo $\Delta = -16$, $\alpha = 1$ e $\beta = 2$, quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$\overline{y}(x) = e^x(A\cos(2x) + B\sin(2x))\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Cerchiamo la soluzione particolare della forma $\varphi(x) = (ax+b)e^{2x}$. Si ha che

$$\varphi'(x) = (2ax + 2b + a)e^{2x}\,, \qquad \varphi''(x) = 4(ax + b + a)e^{2x}\,.$$

Quindi φ verifica l'equazione differenziale se

$$[4(ax+b+a) - 2(2ax+2b+a) + 5(ax+b)]e^{2x} = xe^{2x}\,,$$

ossia, dopo le dovute semplificazioni

$$5ax + 2a + 5b = x\,,$$

verificata se $5a = 1$ e $2a + 5b = 0$, cioè $a = \frac{1}{5}$ e $b = -\frac{2}{25}$. Quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$y(x) = e^x(A\cos(2x) + B\sin(2x)) + \left(\frac{1}{5}x - \frac{2}{25}\right)e^{2x}\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Possiamo ora determinare la soluzione del problema di Cauchy, imponendo le condizioni iniziali:

$$y'(x) = e^x\left((A+2B)\cos(2x) + (B-2A)\sin(2x)\right) + \left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{25}\right)e^{2x}$$

$$\Longrightarrow \qquad y(0) = A - \frac{2}{25} = 0, \qquad y'(0) = A + 2B + \frac{1}{25} = 0\,,$$

da cui si ricava $A = \frac{2}{25}$ e $B = -\frac{3}{50}$. Quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = e^x \left(\frac{2}{25} \cos(2x) - \frac{3}{50} \sin(2x) \right) + \left(\frac{1}{5} x - \frac{2}{25} \right) e^{2x} .$$

Concludiamo con un risultato (la cui dimostrazione è del tutto analoga a quella del Teorema 4.27) che permette di utilizzare le tecniche viste finora per determinare le soluzioni di altre equazioni differenziali lineari non omogenee.

Teorema 4.30 (Principio di sovrapposizione). *Siano f_1 ed f_2 due funzioni continue sullo stesso intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e siano y_1 e y_2 rispettivamente soluzioni delle equazioni differenziali*

$$a y_1'' + b y_1' + c y_1 = f_1(x) , \qquad a y_2'' + b y_2' + c y_2 = f_2(x) .$$

Allora la funzione $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale

$$a y'' + b y' + c y = f_1(x) + f_2(x) .$$

Esempio 4.31. Determiniamo l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 3y' = e^{-2x} + 5 . \tag{4.25}$$

L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 - 3\lambda = 0 ,$$

che ha due soluzioni reali $\lambda = 0$ e $\lambda = 3$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$\overline{y}(x) = A + Be^{3x} , \qquad A, B \in \mathbb{R} .$$

Per determinare la soluzione particolare $\varphi(x)$ dell'equazione non omogenea, cerchiamo una soluzione particolare delle due equazioni

$$y'' - 3y' = e^{-2x} , \qquad y'' - 3y' = 5 ,$$

e poi utilizziamo il principio di sovrapposizione. Una soluzione particolare della prima equazione ha la forma $\varphi_1(x) = Ce^{-2x}$, con C costante da determinare. Abbiamo $\varphi_1'(x) = -2Ce^{-2x}$ e $\varphi_1''(x) = 4Ce^{-2x}$, che sostituite nell'equazione danno

$$(4C + 6C)e^{-2x} = e^{-2x} ,$$

verificata per $C = 1/10$. Quindi $\varphi_1(x) = e^{-2x}/10$. Una soluzione particolare della seconda equazione ha la forma $\varphi_2(x) = ax + b$, con le costanti a e b

da determinare (il termine forzante è un polinomio di grado zero, ma nell'equazione non compare la y e quindi dobbiamo cercare la soluzione particolare come un polinomio di primo grado). Abbiamo $\varphi_2'(x) = a$ e $\varphi_2''(x) = 0$, che sostituite nell'equazione danno $-3a = 5$. Quindi $\varphi_2(x) = -5x/3$ (la scelta di b era arbitraria e abbiamo scelto $b = 0$). Per il principio di sovrapposizione, una soluzione particolare dell'equazione non omogenea (4.25) è

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = e^{-2x}/10 - 5x/3\,,$$

quindi il suo integrale generale è

$$y(x) = A + Be^{3x} + \frac{e^{-2x}}{10} - \frac{5}{3}x\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

4.6 Esercizi

Esercizio 4.1. Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali a variabili separabili.

✍ 1) $y' = 2xy^2$

✍ 2) $y' = -\dfrac{y}{x}$

✍ 3) $\dfrac{y'}{\sqrt{y^2-2}} = \dfrac{e^x}{2y}$

4) $y' = e^{x-y}$

✍ 5) $yy' = \dfrac{1+y^2}{x}$

6) $y' = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) y$

Esercizio 4.2. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy relativi ad equazioni differenziali a variabili separabili.

✍ 1) $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x(x-2)} \\ y(1) = 1 \end{cases}$

✍ 2) $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2+1}{x^2+1} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

✍ 3) $\begin{cases} y' \log y = \dfrac{y}{x} \\ y(e^2) = e \end{cases}$

✍ 4) $\begin{cases} \dfrac{y'}{\sqrt{y}} = -\dfrac{2x}{1-x^2} \\ y(2) = 1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} y' = \dfrac{x}{y}\, e^{x^2-y^2} \\ y(-1) = 2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} y'e^{-y} + x = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$