Esercizio 1. Calcolo il polinomio caratteristico di $L_A$:

$$p_{L_A}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

Ne trovo le radici (complesse a priori):

$$p_{L_A}(\lambda) = 0 \quad \text{sse} \quad \lambda = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i$$

Lo spettro di $L_A$ è dunque $sp(L_A) = \{2 \pm i\}$.

Procedo a calcolare gli autospazi.

$$(\mathbb{C}^2)_{2 \pm i} = \ker \left(L_A - (2 \pm i)\, Id_2\right)$$

Risolvo dunque il sistema omogeneo la cui matrice dei coefficienti è data da

$$\begin{pmatrix} \mp i & -1 \\ 1 & \mp i \end{pmatrix},$$

le cui righe sono (necessariamente) dipendenti.

Risolvo dunque $\mp i z - w = 0$, con parametro

Libero $z = t \in \mathbb{C}$ e ottengo

$$(\mathbb{C}^2)_{2\pm i} = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\ \mp i\end{pmatrix}\right\}$$

Una base di autovettori è dunque data ad esempio da $\left\{\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right\}$.

Ora, $\left\langle \begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right\rangle = 1 + (-i)\cdot(-i) = 1 + i^2 = 0$.

Essi sono dunque ortogonali. Per ottenere una base unitaria di autovettori è dunque sufficiente normalizzarli. Hanno lunghezza al quadrato data da $\left\langle \begin{pmatrix}1\\ \mp i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ \mp i\end{pmatrix}\right\rangle = 2$ e dunque una base unitaria di autovettori è data da

$$\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right\}.$$

Esercizio 2. Per trovare la matrice di $T$ nella base $\{1, x, x^2\}$ calcolo:

$$T(1) = \frac{1}{2} T(1+x+1-x)$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{T(1+x)}_{=x} + \underbrace{T(1-x)}_{=-x}\Big] = 0.$$

$$T(x) = \frac{1}{2} T\big(1+x-(1-x)\big)$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{T(1+x)}_{=x} - \underbrace{T(1-x)}_{=-x}\Big] = x$$

$$T(x^2) = T(x^2) + 0 = T(x^2) + T(1)$$
$$= T(x^2+1) = 2x^2$$

La matrice cercata è dunque data da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si deduce immediatamente risolvendo il sistema lineare omogeneo associato ad $A$ che $\ker T = \mathrm{Span}\{1\}$, e dunque $\{1\}$ è una base per $\ker T$.

L'immagine di $T$ è data dallo Span dei polinomi che corrispondono alle colonne della matrice $A$, cioè $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Span}\{x, 2x^2\}$.

Tali polinomi sono ovviamente lin. indip. e dunque forniscono una base per $\mathrm{Im}(T)$.

Esercizio 3. Per determinare la segnatura di $b_S$ posso ad esempio trovare una base di $\mathbb{R}^3$ che sia $b_S$-ortogonale.

Abbiamo che $b_S(e_1+e_2, e_1+e_2) = 2 \neq 0$

Sia $W_1 = \mathrm{Span}\{e_1+e_2\}$. Allora $W_1^{\perp_{b_S}}$ è dato dalle soluzioni di

$$(x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

cioè $x+y=0$. Una base di $W_1^{\perp_{b_S}}$ è data allora da $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ora, $b_S\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = -2 \neq 0$. Trovo ora l'ortogonale a $\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ rispetto a $b_S|_{W_1^{\perp_{b_S}}}$.

Risolvo nelle indeterminate $\alpha, \beta$

$$b_S\left(\alpha\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0,$$

cioè $\alpha\, b_S\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)+\beta\, b_S\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

$$= -2\alpha - 2\beta = 0.$$

Ottengo dunque $\alpha=-\beta$ e cioè $\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Per costruzione $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ $b_S$-ortogonale. Inoltre

$$b_S\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)=2.$$

Dunque la matrice di $b_S$ in tale base è data da

$$\begin{pmatrix}2&&\\&-2&\\&&2\end{pmatrix},$$

da cui la segnatura di $b_S$ è $(2,1,0)$ e in particolare $b_S$ è non degenere.

Determino ora una base per $U$ risolvendo $y+z=0$

Prendo come parametri liberi $x=s$ e $z=t$ e ottengo $U = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Per trovare $U^{\perp_{b_s}}$ risolvo

$$\begin{cases} (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

Cioè

$$\begin{cases} y+z=0 \\ -y+z=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} y+z=0 \\ 2z=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

In altre parole $U^{\perp_{b_s}} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Non è vero che $\mathbb{R}^3 = U \oplus U^{\perp_{b_s}}$ perché $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U \cap U^{\perp_{b_s}}$ e dunque $U \cap U^{\perp_{b_s}} \neq \{0\}$.