Geometria I. a.a. 2019-2020. Canale L-Z. (Prof. Paolo Piazza)

Soluzioni del foglio dei esercizi n. 2

A cura di Francesca Leonardi e Paolo Piazza

Esercizio 1. Ricordiamo che un vettore $\underline{v}$ in uno spazio euclideo reale $(\mathbb{R}^n, <,>)$ ha lunghezza $\lambda \geq 0$ se $< \underline{v}, \underline{v} >= \lambda^2$. Consideriamo il sottospazio vettoriale W di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}.$$

Possiamo scrivere per W equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ x = 0 \end{cases}$$

al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$. Imponiamo ora che un vettore $\underline{v} \in W$, cioè della forma $\underline{v} = (t, t, 0)$ abbia lunghezza pari a 2. Siccome il prodotto scalare è il prodotto scalare standard (definito dalla matrice identità, risolviamo:

$$\begin{vmatrix} t & t & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} t \\ t \\ 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$t^2 + t^2 = 4$$

$$t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pertando i vettori di W di lunghezza 2 sono

$$\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} \qquad \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 2. **(i)** Per verificare che $\underline{f}_1$ e $\underline{f}_2$ formano una base per il piano σ bisogna verificare che appartengono a σ e che sono linearmente indipendenti. Il fatto che essi generino σ sarà implicato dal fatto che il piano ha dimensione pari a 2. Se $\underline{f}_1$ e $\underline{f}_2$ fossero linearmente dipendenti (cioè proporzionali) esisterebbe $c \in \mathbb{R}$ tale che $\underline{f}_1 = c\underline{f}_2$, ma siccome $\underline{f}_1$ ha la terza componente nulla mentre $\underline{f}_2$ no, si avrebbe $c = 0$, dunque $\underline{f}_2 = 0$, che è assurdo. Dunque $\underline{f}_1$ e $\underline{f}_2$ sono linearmente indipendenti. Per vedere che appartengono a σ basta verificare che le coordinate di $\underline{f}_1$ e $\underline{f}_2$ soddisfano l'equazione cartesiana del piano. Infatti valgono:

$$\frac{2}{\sqrt{5}} + 2\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - 0 = 0;$$

$$\frac{1}{\sqrt{30}} + 2\frac{2}{\sqrt{30}} - \frac{5}{30} = 0.$$

Per verificare che tale base è ortonormale (rispetto al prodotto scalare standard) osserviamo in primo luogo che i due vettori sono ortogonali, cioè che

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} \end{vmatrix} = 0.$$

Verifichiamo infine che hanno norma 1:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+0^2=1; \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{30}}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{30}}\right)^2+\left(\frac{5}{\sqrt{30}}\right)^2=1.$$

(ii) Vogliamo scrivere $\underline{u}=\underline{u}_1+\underline{u}_2=c_1\underline{f}_1+c_2\underline{f}_2$ per opportune costanti $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Possiamo usare il fatto che, essendo $(\underline{f}_1, \underline{f}_2)$ una base ortonormale per il piano σ, vale la formula:

$$\underline{u}=<\underline{u}, \underline{f}_1>\underline{f}_1+<\underline{u}, \underline{f}_2>\underline{f}_2$$

Calcoliamo i prodotti scalari:

$$<\underline{u}, \underline{f}_1>=0\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}+1\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+2\cdot 0=-\frac{1}{\sqrt{5}};$$
$$<\underline{u}, \underline{f}_1>=0\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}+1\cdot\frac{2}{\sqrt{30}}+2\cdot\frac{5}{\sqrt{30}}=\frac{12}{\sqrt{30}}.$$

Concludiamo ponendo

$$\underline{u}_1=<\underline{u}, \underline{f}_1>\underline{f}_1=-\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{vmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{2}{5}\\ \frac{1}{5}\\ 0\end{vmatrix}$$

$$\underline{u}_2=<\underline{u}, \underline{f}_2>\underline{f}_2=\frac{12}{\sqrt{30}}\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{30}}\\ \frac{2}{\sqrt{30}}\\ \frac{5}{\sqrt{30}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{2}{5}\\ \frac{4}{5}\\ 2\end{vmatrix}$$

Un altra possibile soluzione può essere ottenuta in questo modo. Scriviamo:

$$\underline{u}=\begin{vmatrix}0\\1\\2\end{vmatrix}=c_1\begin{vmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0\end{vmatrix}+c_2\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{30}}\\ \frac{2}{\sqrt{30}}\\ \frac{5}{\sqrt{30}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c_1\frac{2}{\sqrt{5}}+c_2\frac{1}{\sqrt{30}}\\ -c_1\frac{1}{\sqrt{5}}+c_2\frac{2}{\sqrt{30}}\\ c_2\frac{5}{\sqrt{30}}\end{vmatrix}.$$

Vogliamo dunque risolvere il sistema (sovradeterminato):

$$\begin{cases} c_1\frac{2}{\sqrt{5}}+c_2\frac{1}{\sqrt{30}}=0\\ -c_1\frac{1}{\sqrt{5}}+c_2\frac{2}{\sqrt{30}}=1\\ c_2\frac{5}{\sqrt{30}}=2\end{cases}.$$

Il sistema ha soluzione $c_1=-\frac{\sqrt{5}}{5}$, $c_2=\frac{2\sqrt{30}}{5}$. Concludiamo:

$$\underline{u}_1=c_1\underline{f}_1=\frac{1}{5}\begin{vmatrix}-2\\1\\0\end{vmatrix} \qquad \underline{u}_2=c_2\underline{f}_2=\frac{2}{5}\begin{vmatrix}1\\2\\5\end{vmatrix}.$$

Esercizio 3. **(3.1)** Fissiamo una base di U la k-upla $(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k)$ e una base di $U^\perp$ la $(n-k)$-upla $(\underline{u}_{k+1}, \dots, \underline{u}_n)$. Ovviamente $(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n)$ è una base per V (perché $V = U \oplus U^\perp$). Per verificare che P_U è un operatore lineare notiamo preliminarmente che $\forall \underline{v} \in V$, se scriviamo $\underline{v}$ nella base che abbiamo costruito $\underline{v} = c_1\underline{u}_1 + \dots + c_n\underline{u}_n$, la proiezione di $\underline{v}$ sul sottospazio U è $P_U(\underline{v}) = c_1\underline{v}_1 + \dots + c_k\underline{u}_k$. Dunque $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, se $\underline{v} = c_1\underline{u}_1 + \dots + c_n\underline{u}_n$ e $\underline{w} = d_1\underline{u}_1 + \dots + d_n\underline{u}_n$ una combinazione lineare di questi è sata da $\lambda\underline{v} + \mu\underline{w} = (\lambda c_1 + \mu d_1)\underline{u}_1 + \dots + (\lambda c_n + \mu d_n)\underline{u}_n$. Allora

$$\begin{aligned}P_U(\lambda\underline{v} + \mu\underline{w}) &= P_U((\lambda c_1 + \mu d_1)\underline{u}_1 + \dots + (\lambda c_n + \mu d_n)\underline{u}_n) = \\ &= (\lambda c_1 + \mu d_1)\underline{u}_1 + \dots + (\lambda c_k + \mu d_k)\underline{u}_k = \\ &= \lambda(c_1\underline{u}_1 + \dots + c_k\underline{u}_k) + \mu(d_1\underline{u}_1 + \dots + d_k\underline{u}_k) = \lambda P_U(\underline{v}) + \mu P_U(\underline{w}).\end{aligned}$$

Per vedere che S_U, la simmetria ortogonale rispetto al sottospazio U, è lineare si può procedere in due modi. Si puòprocedere come abbiamo fatto per la proiezione, esplicitando come agisce S_U su una combinazione lineare di due vettori, oppure possiamo osservare che $S_U = P_U - P_{U^\perp}$, e dunque è lineare perché combinazione lineare di operatori lineari.

(3.2) Utilizzando le notazioni introdotte, osserviamo che se le basi di U e $U\perp$ costruite sono ortonormali la loro unione è una base ortonormale per V (perché ogni vettore di U è ortogonale a ogni vettore di $U^\perp$) e $\forall \underline{v} \in V$ vale l'identità

$$\underline{v} = \sum_{j=1}^{n} < \underline{v}, \underline{u}_j > \underline{u}_j.$$

Per quanto visto finora possiamo scrivere

$$P_U(\underline{v}) = \sum_{j=1}^{k} < \underline{v}, \underline{u}_j > \underline{u}_j.$$

(3.3) Utilizziamo l'espressione appena trovata per P_U. Ovviamente nello stesso modo si scrive

$$P_{U^\perp}(\underline{v}) = \sum_{j=k+1}^{n} < \underline{v}, \underline{u}_j > \underline{u}_j.$$

(1) $P_U + P_{U^\perp} = Id_V$ vale per definizione: infatti se $\underline{v} = \underline{u} + \underline{u}^\perp$ era la decomposizione (unica) di $\underline{v}$ nei sottospazi U e $U^\perp$, avevamo definito $P_U(\underline{v}) = \underline{u}$ e $P_{U^\perp}(\underline{v}) = \underline{u}^\perp$.
Per verificare che $(P_U)^2 = P_U$, scriviamo $\forall \underline{v} \in V$

$$\begin{aligned}(P_U)^2(\underline{v}) = P_U(P_U(\underline{v})) = P_U\left(\sum_{j=1}^{k} < \underline{v}, \underline{u}_j > \underline{u}_j\right) = \sum_{j=1}^{k} < \underline{v}, \underline{u}_j > P_U(\underline{u}_j) = \\ = \sum_{j=1}^{k}\left(< \underline{v}, \underline{u}_j > \sum_{h=1}^{k} < \underline{u}_j, \underline{u}_h > \underline{u}_h\right) = \sum_{j=1}^{k} < \underline{v}, \underline{u}_j > \underline{u}_j = P_U(\underline{v}),\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che, essendo $(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k)$ una base ortonormale per U, in particolare $< \underline{u}_j, \underline{u}_h >= \delta_{j,h}$. Un'altra possibile soluzione può essere data notando che $P_U|_U = Id_U$ (basta osservarlo sugli elementi della base $(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k)$ con un argomento analogo a quello che abbiamo usato nella prima soluzione) e che $\forall \underline{v} \in V$ $P_U(\underline{v}) \in U$ (ovvio dalla definizione).
L'identità $(P_{U^\perp})^2 = P_{U^\perp}$ segue dalla precedente rimpiazzando U con $U^\perp$.

(2) Per verificare che $S_U = Id_V - 2P_{U^\perp}$ è sufficiente usare la prima delle tre identità trovate al punto (1):

$$Id_V - 2P_{U^\perp} = P_U + P_{U^\perp} - 2P_{U_\perp} = P_U - P_{U^\perp} = S_U$$

per quanto osservato nel mostrare che S_U è lineare. Analogamente, mostriamo che $S_{U^\perp} = 2P_{U^\perp} - Id_V$:

$$2P_{U^\perp} - Id_V = 2P_{U^\perp} - (P_U + P_{U^\perp}) = P_{U^\perp} - P_U = P_{U^\perp} - P_{(U^\perp)^\perp} = S_{U^\perp}.$$

(3) Verifichiamo che $(S_U)^2 = Id_V$. Si vede che, $\forall \underline{v} \in V$:

$$\begin{aligned}(S_U)^2(\underline{v}) &= (S_U(S_U(\underline{v})) = S_U(P_U(\underline{v}) - P_{U^\perp}(\underline{v})) = \\ &= P_U(P_U(\underline{v})) - P_{U^\perp}(P_U(\underline{v})) - P_U(P_{U^\perp}(\underline{v})) + P_{U^\perp}(P_{U^\perp}(\underline{v})) = \\ &= P_U(\underline{v}) + P_{U^\perp}(\underline{v}) = Id_V(\underline{v}).\end{aligned}$$

Nella verifica di questa identità abbiamo usato che $P_U(P_{U^\perp}(\underline{v})) = 0$ e $P_{U^\perp}(P_U(\underline{v})) = 0$ perché $P_U(U^\perp) = \{0\}$ e $P_{U^\perp}(U) = \{0\}$. Giustifichiamo la prima affermazione (la seconde è analoga). Sia $\underline{v} \in U^\perp$, allora $\underline{v}$ si decompone nei sottospazi U e $U^\perp$ come $\underline{v} = 0 + \underline{v} \in U \oplus U^\perp = V$; ricordando che la proiezione ortogonale sul sottospazio U è il primo addendo di questa espressione, $P_U(\underline{v}) = 0$.
L'identità $(S_{U^\perp})^2 = Id_V$ è analoga.

(3.4) Per mostrare che P_U (e nello stesso modo $P_{U^\perp}$) è diagonalizzabibile, consideriamo la base che abbiamo costruito all'inizio $\mathcal{B} = (\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n)$. La proiezione ortogonale sul sottospazio U dei vettori della base è

$$P_U(\underline{u}_j) = \begin{cases} \underline{u}_j & \text{se } 1 \le j \le k \\ 0 & \text{se } k+1 \le j \le n \end{cases} .$$

Nello stesso modo:

$$P_{U^\perp}(\underline{u}_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } 1 \le j \le k \\ \underline{u}_j & \text{se } k+1 \le j \le n \end{cases} .$$

NOTAZIONE. Per $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ abbiamo visto la notazione di Sernesi per la matrice associata a T con base di partenza $\mathcal{B}$ e base di arrivo $\mathcal{E}$. Questa matrice è stata denotata $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T)$.
Nelle soluzioni utilizzeremo anche la notazione $[T]_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$

Tornando all'esercizio, vediamo che le rispettive matrici sono

$$[P_U]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$[P_{U^\perp}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{vmatrix}$$

Dunque la base $\mathcal{B}$ è una base diagonalizzante per entrambi gli operatori. In questo modo si vede subito che gli autovalori sono 0 e 1 e gli autospazi sono

$$V_{P_U}(0) = U^\perp \qquad V_{P_U}(1) = U \qquad V_{P_{U^\perp}}(0) = U \qquad V_{P_{U^\perp}}(1) = U^\perp.$$

Per studiare S_U e $S_{U^\perp}$, scriviamo le matrici nella base $\mathcal{B}$ utilizzando l'identità che abbiamo dimostrato $S_U = Id_V - 2P_{U^\perp}$ (e l'analoga $S_{U^\perp} = Id_V - 2P_U$). Troviamo

$$[S_U]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = [Id_V]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} - 2[P_{U^\perp}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

ovvero

$$[S_U]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{vmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_{n-k} \end{vmatrix}.$$

Nello stesso modo si trova che

$$[S_{U^\perp}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = [Id_V]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} - 2[P_U]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

cioè

$$[S_{U^\perp}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{vmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{vmatrix}.$$

Entrambi gli operatori hanno autovalori 1 e -1 e gli autospazi corrispondenti sono

$$V_{S_U}(1) = U \qquad V_{S_U}(-1) = U^\perp \qquad V_{S_{U^\perp}}(1) = U^\perp \qquad V_{S_{U^\perp}}(-1) = U.$$

(3.5) Procediamo come abbiamo fatto nel rispondere ai quesiti teorici precedenti, cioè considerando come sottospazio U il piano σ. Osserviamo innanzitutto che i vettori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono ortogonali rispetto al prodotto scalare standard. Le loro normalizzazioni sono

$$\underline{u}_1 = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \underline{u}_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}.$$

Dunque $(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ è una base ortonormale per σ.
A questo punto possiamo utiliazzare la formula trovata al punto **(3.2)** per calcolare l'immagine di P sui vettori della base canonica:

$$P\underline{e}_1 = < \underline{u}_1, \underline{e}_1 > \underline{u}_1 + < \underline{u}_2, \underline{e}_1 > \underline{u}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix};$$

$$P\underline{e}_2 = < \underline{u}_1, \underline{e}_2 > \underline{u}_1 + < \underline{u}_2, \underline{e}_2 > \underline{u}_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix};$$

$$P\underline{e}_3 = < \underline{u}_1, \underline{e}_3 > \underline{u}_1 + < \underline{u}_2, \underline{e}_3 > \underline{u}_2 = 0 \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{vmatrix};$$

$$P\underline{e}_4 = < \underline{u}_1, \underline{e}_4 > \underline{u}_1 + < \underline{u}_2, \underline{e}_4 > \underline{u}_2 = 0 \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

La matrice di P nella base canonica è la matrice che ha per colonne i vettori $\{P\underline{e}_j\}$ che abbiamo calcolato, cioè:

$$[P]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Un altro modo di procedere è, dopo aver ortonormalizzato la base per il piano σ (cioè dopo aver trovato $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$), cercare una base ortonormale e utilizzare quanto visto ai punti precedenti. Come abbiamo visto, è equivalente completare $(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ a una base ortonormale $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4)$ per V: in questo modo avremo $(\underline{u}_3, \underline{u}_4)$ sarà una base ortonormale per $U^{\perp}$. Cerchiamo $\underline{u}_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4) \neq 0$ che soddisfi:

$$\begin{cases} <\underline{u}_1, \underline{u}_3> = 0 \\ <\underline{u}_2, \underline{u}_3> = 0 \\ ||\underline{u}_3||^2 = <\underline{u}_3, \underline{u}_3> = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_4 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \end{cases}.$$

Un tale vettore è, ad esempio,

$$\underline{u}_3 = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Analogamente, cerchiamo $\underline{u}_4 = (x_1, x_2, x_3, x_4) \neq 0$ che soddisfi:

$$\begin{cases} <\underline{u}_1, \underline{u}_4> = 0 \\ <\underline{u}_2, \underline{u}_4> = 0 \\ <\underline{u}_3, \underline{u}_4> = 0 \\ ||\underline{u}_4||^2 = <\underline{u}_4, \underline{u}_4> = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_4 = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \end{cases}.$$

Scegliamo

$$\underline{u}_4 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}.$$

Abbiamo già visto che la matrice di P_U nella base $\mathcal{B} = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4)$ che abbiamo costruito è

$$[P_U]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

A questo punto dobbiamo solamente effettuare un cambiamento di base. Sciviamo la matrice di cambiamento di base $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ dalla base diagonalizzante $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{E}$, cioè la matrice che ha per colonne i vettori della base $\mathcal{B}$ scritti nelle coordinate della case canonica:

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Calcoliamone l'inversa:

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}^{-1} = M_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Otteniamo in questo modo:

$$[P_U]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}[P_U]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}M_{\mathcal{B},\mathcal{E}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 4. Seguendo il suggerimento, consideriamo

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Per definizione $A \in O(2)$ se $A^T A = I_2$, cioè:

$$A^T A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^T \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} & a_{12}^2 + a_{22}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = I_2$$

Osserivamo inizialmente che

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \phi \in \mathbb{R} \quad | \; a_{11} = \cos\phi \quad \text{e } a_{21} = \sin\phi.$$

Nello stesso modo

$$a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \theta \in \mathbb{R} \quad | \; a_{12} = \sin\theta \quad \text{e } a_{22} = \cos\theta.$$

Per concludere, imponiamo l'ultima relazione nelle variabili ϕ e θ:

$$\cos\phi\sin\theta + \sin\phi\cos\theta = 0$$

$$\sin(\phi + \theta) = 0$$

$$\phi + \theta = 0 \text{ modulo } 2\pi \quad \text{oppure} \quad \phi + \theta = \pi \text{ modulo } 2\pi.$$

Nel primo caso otteniamo

$$A = \begin{vmatrix} \cos\phi & \sin(-\phi) \\ \sin\phi & \cos(-\phi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{vmatrix} = R_\phi.$$

Nel secondo invece

$$A = \begin{vmatrix} \cos\phi & \sin(\pi - \phi) \\ \sin\phi & \cos(\pi - \phi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{vmatrix} = S_\phi.$$

Studiamo ora i casi in cui i due operatori sono diagonalizzabili. Il polinomio caratteristico associato a R_ϕ è $P_{R_\phi}(\lambda) = (\cos\phi - \lambda)^2 + \sin^2\phi = \lambda^2 - 2\cos\phi\lambda + 1$; il discriminante di questo polinomio di secondo grado è non negativo se e solo se $\cos^2\phi = 1$ e cioè se e solo se $\phi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, nel qual caso $R_\phi = \pm I$ (ed è quindi addirittura diagonale); per gli altri valori di ϕ le radici del polinomio caratteristico sono complesse non-reali e quindi R_ϕ non è diagonalizzabile sui reali. Il polinomio caratteristico di S_ϕ è $\lambda^2 - 1$ da cui segue che gli autovalori di S_ϕ sono 1 e -1. S_ϕ è quindi diagonalizzabile (autovalori reali e distinti).

R_ϕ è la rotazione di un angolo ϕ nel verso antiorario del piano. Per quel che concerne

S_ϕ, abbiamo visto che è un operatore autoaggiunto e con autovalori ± 1. Calcoliamo questo autospazio: $V_{S_\phi}(1) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid S_\phi \underline{x} = \underline{x}\}$. Scriviamo $\underline{x} = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ con $\rho = ||\underline{x}||$. Allora $S_\phi \underline{x} = \underline{x}$ se e solo se $\cos\phi\cos\theta + \sin\phi\sin\theta = \cos\theta$ e $\sin\phi\cos\theta - \cos\phi\sin\theta = \sin\theta$ da cui segue, utlizzando le formule trigonometriche richiamate nel testo dell'esercizio, che $\theta = \phi/2$ modulo 2π. In definitiva $V_{S_\phi}(1) = \mathbb{R}(\cos\frac{\phi}{2}, \sin\frac{\phi}{2})$ e quindi S_ϕ è la simmetria ortogonale rispetto a questa retta.

Esercizio 5. (i) Scrivendo le equazioni parametriche di W al variare di $t, s \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \\ x_4 = s \end{cases}.$$

Eliminando i due parametri si ottengono le due equazioni linearmente indipendenti $x_1 - x_3 = 0$, $x_2 - x_4 = 0$.

(ii) Dato che $U^\perp = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid <\underline{x}, \underline{g}_1> = 0, \quad <\underline{x}, \underline{g}_2> = 0, \quad <\underline{x}, \underline{h}_1> = 0\}$ ne segue che $(U)^\perp$ ha equazioni

$$x_1 + x_3 = 0, \quad x_2 + x_4 = 0, \quad x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

Risolvedo il sistema otteniamo $(U)^\perp = \mathbb{R}(-1, 1, 1, -1)$.
Ne segue che $\underline{h}_2 = \dfrac{1}{2}(-1, 1, 1, -1)$.

(iii) Basta mostrare che entrambi i vettori hanno prodotto scalare nullo con $\underline{g}_1$ e $\underline{g}_2$. Calcoliamo dunque:

$$\begin{aligned}
<\underline{h}_1, \underline{g}_1> &= 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0; \\
<\underline{h}_1, \underline{g}_2> &= 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0; \\
<\underline{h}_2, \underline{g}_1> &= 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0; \\
<\underline{h}_2, \underline{g}_2> &= 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.
\end{aligned}$$

(iv) Consideriamo la base *ortogonale* di $\mathbb{R}^4$ $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{h}_1 + \underline{h}_2, \underline{h}_1 - \underline{h}_2\}$; T è ben definito perché sono dati i suoi valori su questa base: $T\underline{g}_1 = \underline{g}_1$; $T\underline{g}_2 = \underline{0}$; $T(\underline{h}_1 + \underline{h}_2) = \underline{0}$; $T(\underline{h}_1 - \underline{h}_2) = -(\underline{h}_1 - \underline{h}_2)$. Sia $\{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3, \underline{f}_4\}$ la base *ortonormale* associata. La matrice associata a T in questa base è (pensateci un attimo)

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Sia C la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori $\{\underline{f}_j\}$ nella base canonica. Si ha $C^{-1} = C^T$ perché la nuova base è ortonormale. Sia K la matrice associata a T nella base canonica; questa è la matrice che cerchiamo. Sappiamo che $L = C^{-1}KC$ e quindi $K = CLC^{-1} = CLC^T$ dato che $CC^T = I$. Facendo i conti si ottiene la matrice

$$K = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

(v) Per definizione $S = \mathrm{Span}(\underline{e}_1, \underline{e}_3)$. Esaminando la matrice K scopriamo che $T\underline{e}_1 = \underline{e}_3$ e $T\underline{e}_3 = \underline{e}_1$. Ne segue che V è invariante e $T|_V$ è una biezione.