Geometria I. a.a. 2019-2020. Canale L-Z. (Prof. Paolo Piazza)

Soluzioni del foglio dei esercizi n. 1

A cura di Francesca Leonardi

Esercizio 1. Verifichiamo che b è una forma bilineare: per farlo osserviamo che $\forall\, t, s \in \mathbb{R}, \forall \underline{x}, \underline{x}', \underline{y}, \underline{y}' \in \mathbb{R}^{2n}$ si ha

$$\begin{aligned}
b(t\underline{x} + s\underline{x}', \underline{y}) &= (tx_1 + sx_1')y_{n+1} + \cdots + (tx_n + sx_n')y_{2n} - (tx_{n+1} + sx_{n+1}')y_1 - \dots \\
&\cdots - (tx_{2n} + sx_{2n}')y_n = tx_1y_{n+1} + \cdots + tx_ny_{2n} - tx_{n+1}y_1 - \cdots - tx_{2n}y_n + \\
&+ sx_1'y_{n+1} + \cdots + sx_n'y_{2n} - sx_{n+1}'y_1 - \cdots - sx_{2n}'y_n = t(x_1y_{n+1} + \cdots + x_ny_{2n} - \\
&- x_{n+1}y_1 - \cdots - x_{2n}y_n) + s(x_1'y_{n+1} + \cdots + x_n'y_{2n} - x_{n+1}'y_1 - \cdots - x_{2n}'y_n) = \\
&= tb(\underline{x}, \underline{y}) + sb(\underline{x}', \underline{y}).
\end{aligned}$$

Nello stesso modo si fa vadere che:

$$b(\underline{x}, t\underline{y} + s\underline{y}') = tb(\underline{x}, \underline{y}) + sb(\underline{x}, \underline{y}').$$

Dunque b è bilineare. Per scrivere la matrice, notiamo che i valori che b assume sulla base standard sono

$$\begin{aligned}
&b(\underline{e}_i, \underline{e}_{i+n}) = 1 \qquad \forall i = 1, \dots, n; \\
&b(\underline{e}_{i+n}, \underline{e}_i) = -1 \qquad \forall i = 1, \dots, n; \\
&b(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = 0 \qquad \forall i, j = 1, \dots, 2n \quad \text{tali che } i \neq j + n \text{ e } j \neq i + n.
\end{aligned}$$

Dunque la matrice associata alla forma bilineare nella base standard è

$$\mathcal{A}_b^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

dove I_n denota la matrice $n \times n$ con 1 sulla diagonale e 0 altrove (cioè la matrice identità).
Vero: b è antisimmetrica. Per vederlo si può fare il calcolo esplicito e trovare che $b(\underline{x}, \underline{y}) = -b(\underline{y}, \underline{x})$, oppure osservare che b è antisimmetrica su una base, oppure notare che la matrice di b (in questo caso nella base $\mathcal{E}$) è una matrice antisimmetrica.

Esercizio 2. Ricordiamo che la matrice di b nella base $\mathcal{E}$ è

$$\mathcal{A}_b^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Il vettore $1 + X$, nella base $\mathcal{E}$, ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Per trovare una base al sottospazio b-ortogonale ad esso cerchiamo due vettori indipendenti $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ tali che

$$0 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3.$$

Tale equazione è soddisfatta ad esempio da $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pertanto i vettori $X - X^2$ e $1 - 3X$ costituiscono una base per il sottospazio b-ortogonale al vettore $1 + X$.

Esercizio 3. **(a)** Falso: il vettore $\underline{e}_3$ della base canonica è isotropo.

(b) b ha matrice simmetrica associata $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si verifica che il determinante di A è diverso da zero (è uguale a 1); ne segue che $rg(b) = 4$. Vogliamo innanzitutto determinare una base diagonalizzante $\mathcal{K}= \{\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3, \underline{k}_4\}$ per $b(\, , \,)$, ci occuperemo poi di passare dalla forma diagonale alla forma di Sylvester. Osserviamo preliminarmente che questi 4 vettori dovranno essere non isotropi dato che $r = 4$. Per costruire $\mathcal{K}$ ci ispiriamo al procedimento induttivo che ci ha permesso di dimostrare, in generale, l'esistenza di basi diagonalizzanti per una qualsiasi forma bilineare simmetrica. Denotiamo con $\underline{u} = (u_1, \ldots, u_4)$ una 4-pla in $\mathbb{R}^4$. Partiamo da un vettore non isotropo $\underline{k}_1$. Ad esempio il vettore $\underline{k}_1 = (1, 1, 1, 1)$ per il quale si ha $b(\underline{k}_1, \underline{k}_1) = 1 - 1 + 2 = 2 \neq 0$. Consideriamo il sottospazio b-ortogonale a $\underline{k}_1$. Questo è il sottospazio

$$\{\underline{u} \in \mathbb{R}^4 \,|\, b(\underline{u}, (1, 1, 1, 1)) = 0\} = \{(u_1, u_2, u_3, u_4) \,|\, u_1 - u_2 + u_3 + u_4 = 0\}$$

Scegliamo il secondo vettore $\underline{k}_2$ della base diagonalizzante in questo sottospazio e non isotropo. Ad esempio il vettore $\underline{k}_2 = (1, 1, -1, 1)$ che verifica l'equazione trovata ed è tale che $b(\underline{k}_2, \underline{k}_2) = -2$.

Il terzo vettore $\underline{k}_3$ della base diagonalizzante va cercato fra i vettori non isotropi che verificano simultaneamente

$$\begin{cases} b(\underline{u}, (1, 1, 1, 1)) = 0 \\ b(\underline{u}, (1, 1, 1, -1)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_2 + u_3 + u_4 = 0 \\ u_1 - u_2 + u_3 - u_4 = 0 \end{cases}$$

Il vettore $\underline{k}_3 = (1, 0, 0, -1)$ verifica entrambe queste equazioni ed è tale che $b(\underline{k}_3, \underline{k}_3) = 1$.

Rimane da determinare il quarto vettore: deve essere non isotropo e b-ortogonale a $\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3$. Il vettore $\underline{k}_4$ va allora cercato nel sottospazio dei vettori $\underline{u} \in \mathbb{R}^4$ che verificano simultaneamente

$$\begin{cases} b(\underline{u}, (1, 1, 1, 1)) = 0 \\ b(\underline{u}, (1, 1, 1, -1)) = 0 \\ b(\underline{u}, (1, 0, 0, -1)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_2 + u_3 + u_4 = 0 \\ u_1 - u_2 + u_3 - u_4 = 0 \\ u_1 - u_3 = 0 \end{cases}$$

Una soluzione di questo sistema è data dal vettore $\underline{k}_4 = (1, 2, 1, 0)$; inoltre $b(\underline{k}_4, \underline{k}_4) = -3$. Se $\mathcal{K}$ è la base $\{\underline{k}_1, \ldots, \underline{k}_4\}$ si ha quindi $A_b^{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Questo vuol dire che $\mathcal{K}$ è una base diagonalizzante come richiesto. Equivalentemente, se C è la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori $\underline{k}_j$ nella base canonica (cioè $C = M_{\mathcal{E},\mathcal{K}}$ è la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{K}$ che è stata costruita alla base canonica $\mathcal{E}$) allora

$$C^T AC = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

(f) La base $\mathcal{F} = \{\underline{f}_1 := \frac{k_1}{\sqrt{2}}; \quad \underline{f}_2 := \underline{k}_3; \quad \underline{f}_3 := \frac{k_2}{\sqrt{2}}; \quad \underline{f}_4 := \frac{k_4}{\sqrt{3}}\}$ fornisce allora la matrice del teorema di Sylvester:

$$A_b^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(g) $W_+ = \text{Span}\{\underline{f}_1, \underline{f}_2\}$. Infatti b ristretta a tale sottospazio ha matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, quindi su W_+ così definito b è definita positiva, perché c'è una base di Sylvester in cui la matrice ha tutti coefficienti 1. Analogamente $W_- = \text{Span}\{\underline{f}_3, \underline{f}_4\}$ è il sottospazio su cui b è definita negativa. Le equazioni cartesiane per W_+ sono

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

le equazioni cartesiane per W_- sono

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Esercizio 4. Esistono due vettori non nulli $\underline{v}, \underline{w} \in V$ tali che $b(\underline{v}, \underline{w}) \neq 0$ perché b è non degenere. Sia $b(\underline{v}, \underline{w}) = \alpha$; allora se $\underline{u} = \underline{v}/\alpha$, si ha che $b(\underline{u}, \underline{w}) = 1$. Ovviamente $\underline{u}$ e $\underline{w}$ sono anche indipendenti: infatti, se non lo fossero si avrebbe ad esempio $\underline{w} = \lambda\underline{u}$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$, ma allora si avrebbe $b(\underline{u}, \underline{w}) = b(\underline{u}, \lambda\underline{u}) = \lambda b(\underline{u}, \underline{u}) = 0$. Dunque $\dim\big(\text{Span}\{\underline{u}, \underline{w}\}\big) = 2$. Poniamo, come nel suggerimento, $\underline{f}_1 = \underline{u}$ e $\underline{\varphi}_1 = \underline{w}$. Siccome b è non degenere, $\text{Span}\{\underline{f}_1, \underline{\varphi}_1\} \cap \text{Span}\{\underline{f}_1, \underline{\varphi}_1\}^{\perp_b} = \{0\}$. Infatti, se esistesse un $\underline{v} \in \text{Span}\{\underline{f}_1, \underline{\varphi}_1\} \cap \text{Span}\{\underline{f}_1, \underline{\varphi}_1\}^{\perp_b}$, allora $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \underline{v} = \alpha\underline{f}_1 + \beta\underline{\varphi}_1$, ma siccome $\underline{v} \in \text{Span}\{\underline{f}_1, \underline{\varphi}_1\}^{\perp_b}$, si avrebbe

$$0 = b(\underline{v}, \underline{f}_1) = \alpha b(\underline{f}_1, \underline{f}_1) + \beta b(\underline{\varphi}_1, \underline{f}_1) = -\beta$$

e allo stesso modo

$$0 = b(\underline{v}, \underline{\varphi}_1) = \alpha b(\underline{f}_1, \underline{\varphi}_1) + \beta b(\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_1) = \alpha,$$

quindi $\underline{v} = \underline{0}$. Per concludere, si scriva

$$\underline{v} = (\underline{v} - b(\underline{f}_1, \underline{v})\underline{\varphi}_1 + b(\underline{\varphi}_1, \underline{v})\underline{f}_1) + (b(\underline{f}_1, \underline{v})\underline{\varphi}_1 - b(\underline{\varphi}_1, \underline{v})\underline{f}_1).$$

Osserviamo che, se denotiamo

$$\underline{v}_1 := \underline{v} - b(\underline{f}_1, \underline{v})\underline{\varphi}_1 + b(\underline{\varphi}_1, \underline{v})\underline{f}_1;$$

$$\underline{v}_2 := b(\underline{f}_1, \underline{v})\underline{\varphi}_1 - b(\underline{\varphi}_1, \underline{v})\underline{f}_1$$

si ha che $\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$ e

$$b(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = b(\underbrace{\underline{v} - b(\underline{f}_1, \underline{v})\underline{\varphi}_1 + b(\underline{\varphi}_1, \underline{v})\underline{f}_1}_{\underline{v}_1}, \underbrace{b(\underline{f}_1, \underline{v})\underline{\varphi}_1 - b(\underline{\varphi}_1, \underline{v})\underline{f}_1}_{\underline{v}_2}) =$$

$$= b(\underline{v}, b(\underline{f}_1, \underline{v})\underline{\varphi}_1 - b(\underline{\varphi}_1, \underline{v})\underline{f}_1) - \underbrace{b(b(\underline{f}_1, \underline{v})\underline{\varphi}_1 - b(\underline{\varphi}_1, \underline{v})\underline{f}_1, b(\underline{f}_1, \underline{v})\underline{\varphi}_1 - b(\underline{\varphi}_1, \underline{v})\underline{f}_1)}_{0} =$$

$$= b(\underline{f}_1, \underline{v})\, b(\underline{v}, \underline{\varphi}_1) - b(\underline{\varphi}_1, \underline{v})\, b(\underline{v}, \underline{f}_1) = b(\underline{f}_1, \underline{v})\, b(\underline{v}, \underline{\varphi}_1) - b(\underline{f}_1, \underline{v})\, b(\underline{v}, \underline{\varphi}_1) = 0.$$

Segue che

$$V = \mathrm{Span}\{\underline{f}_1, \underline{\varphi}_1\} \oplus \mathrm{Span}\{\underline{f}_1, \underline{\varphi}_1\}^{\perp_b}.$$

Se $\mathrm{Span}\{\underline{f}_1, \underline{\varphi}_1\}^{\perp_b} = \{0\}$, concludiamo $\dim(V) = 2$ e la matrice di b nella base $\{\underline{f}_1, \underline{\varphi}_1\}$ è $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Altrimenti, se $\mathrm{Span}\{\underline{f}_1, \underline{\varphi}_1\}^{\perp_b} \neq \{0\}$ reitero il ragionamento su tale sottospazio. Questo procedimento è possibile perché la restrizione di b a $\mathrm{Span}\{\underline{f}_1, \underline{\varphi}_1\}^{\perp_b}$ è ancora non degenere e antisimmetrica: infatti, se esistesse $\underline{v} \neq \underline{0}$, $\underline{v} \in \mathrm{Span}\{\underline{f}_1, \underline{\varphi}_1\}^{\perp_b}$ tale che $b(\underline{v}, \underline{w}) = 0\ \forall \underline{w} \in \mathrm{Span}\{\underline{f}_1, \underline{\varphi}_1\}^{\perp_b}$, siccome $v \in \mathrm{Span}\{\underline{f}_1, \underline{\varphi}_1\}^{\perp_b}$ si avrebbe $b(\underline{v}, \underline{w}) = 0\ \forall \underline{w} \in V$, cioè b sarebbe degenere. L'antisimmetria è ovvia. In questo modo, si trova una base $\{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n, \underline{\varphi}_1, \dots, \underline{\varphi}_n\}$, rispetto alla quale la matrice associata a b è $\begin{pmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{pmatrix}$. Si vede che V ha dimensione pari.

Vero: una forma bilineare antisimmetrica non banale non può essere diagonalizzata; infatti, se si potesse diagonalizzare (cioè se fosse possibile scegliere una base in cui la matrice associata alla forma è diagonale), tale matrice sarebbe simmetrica (perché diagonale). Allora anche la forma bilineare sarebbe simmetrica.
Un'altra possibile risposta può essere data osservando che la matrice associata a una forma bilineare antisimmetrica qualunque ha tutti zeri sulla diagonale. SUpponiamo che una forma bilineare antisimmetrica non nulla sia diagonalizzabile, allora la matrice associata in un'opportuna base sarebbe ovviamente diagonale e con tutti zeri sulla diagonale (perché ancora antisimmetrica), dunque sarebbe la matrice nulla, che è assurdo.