Matematica II

Facoltà di Ingegneria dell'Informazione, Informatica e Statistica

Corso di Laurea in Statistica, Economia, Finanza e Assicurazioni. - a.a. 2016-2017.

Soluzioni secondo compito a casa

Esecizio 1. Determinare estremo superiore ed inferiore degli insiemi

$$A_1 == \{x \in \mathbb{R} \mid x = (-1)^n \frac{2n-1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$$

$$A_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x = (-1)^n \frac{2n+1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$$

Soluzione. Riscriviamo A_1 come $\{x \in \mathbb{R} \mid x = (-1)^n(2 - (1/n)), n \in \mathbb{N}\}$. Per $n = 2k$ otteniamo $(-1)^n = 1$ e quindi abbiamo numeri sempre più vicini a 2 ma strettamente più piccoli di 2. Si ha quindi che 2 è un maggiorante e che esso è il più piccolo dei maggioranti; infatti se $a < 2$ allora per k abbastanza grande

$$2 - \frac{1}{2k} > a$$

e quindi a non è un maggiorante. Conclusione $\sup(A_1) = 2$. Analogamente, ragionando con n dispari, otteniamo che $\inf(A_1) = -2$.
Per A_2, con ragionamento analogo, si ottiene $\sup(A_2) = 5/2$ e $\inf(A_2) = -3$.

Esercizio 2. Studiare iniettività e suriettività delle seguenti applicazioni:

- $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longrightarrow x^2 - 3x + 2$
- $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$
  $x \longrightarrow \sin x$
- $f_3 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$
  $x \longrightarrow x + 1$
- $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longrightarrow 2x + 5$
- $f_5 : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Q}$
  $n \longrightarrow 1/n$
- $f_6 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$
  $x \longrightarrow 2x$

Soluzione esercizio 2. L'applicazione $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ x \longrightarrow x^2 - 3x + 7$ non è suriettiva perché il discriminante del polinomio $x^2 - 3x + 7$ è negativo; quindi non ci sono soluzioni reali di $x^2 - 3x + 7 = 0$. Detto altrimenti, non ci sono $x \in \mathbb{R}$ tali che $f_1(x) = 0$; quindi $0 \notin \mathrm{Im} f$. Di fatto, $f_1(x) > 0$ per ogni x in $\mathbb{R}$, quindi l'immagine di f_1 è contenuta in $\mathbb{R}_>$.
f_1 non è iniettiva perché per ogni $\mathbf{b} \in \mathrm{Im}(f_1)$ ci sono due soluzioni dell'equazione $x^2 - 3x + 7 = \mathbf{b}$ (tranne quando $(3^2 - 4(7 - \mathbf{b}) = 0)$, o, detto, altrimenti, ci sono due elementi nel dominio, $x_{\mathbf{b}}$ e $\tilde{x}_{\mathbf{b}}$ tali che la loro immagine tramite f_1 coincide ed è uguale a $\mathbf{b}$.

$f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$, $x \longrightarrow \sin x$ è chiaramente non iniettiva perchè il seno è una funzione periodica. L'immagine è $[-1,1]$ e quindi la funzione seno, da $\mathbb{R}$ a $[-1,1]$ è suriettiva.

$f_3 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ $x \longrightarrow x+1$ è iniettiva e suriettiva.

$f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longrightarrow 2x+5$ è iniettiva e suriettiva.

$f_5 : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Q}$ $n \longrightarrow 1/n$ è iniettiva ma chiaramente non suriettiva (l'immagine è contenuta nei numeri razionali nell'intervallo $[0,1]$).

$f_6 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ $x \longrightarrow 2x$ è iniettiva ma non suriettiva, dato che ha come immagine i numeri pari.

Esercizio 3. Verificare che se $f : A \to B$ è biunivoca (quindi f è iniettiva e suriettiva) e $f^{-1} : B \to A$ è la sua inversa, allora $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B$ e $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A$ dove se X è un insieme allora $\mathrm{Id}_X : X \to X$ è la funzione che ad x associa x; in formule

$$\mathrm{Id}_X(x) := x\,.$$

Id_X è detta funzione identità.

Soluzione esercizio 3. Ricordiamo che se $\beta \in B$ allora l'insieme $f^{-1}(\beta) \subset A$,

$$f^{-1}(\beta) := \{\alpha \in A \mid f(\alpha) = \beta\}\,,$$

è non vuoto (perché f è suriettiva) e costituito da un unico elemento $\alpha \in A$ (perché f è iniettiva); per definizione $f(\alpha) = \beta$ (perché α è nella controimmagine di β). Vi ricordo anche che la funzione inversa f^{-1} calcolata in β vale proprio α; infatti, per definizione, $f^{-1}(\beta)$ è uguale all'unico elemento di A che ha come immagine β. Quindi

$$(f \circ f^{-1})(\beta) = f(f^{-1}(\beta)) = f(\alpha) = \beta = \mathrm{Id}_B(\beta)$$

da cui dediciamo, dato che β è arbitrario, che $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B$. Per dimostrare che $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A$ procediamo analogamente: $(f^{-1} \circ f)(\alpha) = f^{-1}(f(\alpha))$; ma la funzione inversa applicata a $f(\alpha)$ è uguale all'unico elemento di A che ha come immagine $f(\alpha)$; questo elemento è, ovviamente, α. Conclusione $(f^{-1} \circ f)(\alpha) = \alpha = \mathrm{Id}_A(\alpha)$ e, dato che α è arbitrario, ne deduciamo che $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A$.

Esercizio 4. A cosa è uguale $\pi^3\,\pi^{\frac{1}{3}}$? Possibile risposte (scegliere quella giusta):

$$0\,,\quad 1\,,\quad \pi\,,\quad \frac{1}{\pi}\,,\quad \sqrt[3]{\pi^{10}}\,,\quad \sqrt[10]{\pi^3}\,.$$

Soluzione esercizio 4. Sappiamo che, in generale,

$$x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}\,,\quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

In questo caso

$$\pi^3\,\pi^{\frac{1}{3}} = \pi^{3+\frac{1}{3}} = \pi^{\frac{10}{3}} = \sqrt[3]{\pi^{10}}\,.$$

Esercizio 5. Sia $a \neq 1$. Calcolare

$$\log_a(1)\,,\quad \log_a(a)\,,\quad \log_a(a^2)\,,\quad \log_a(\sqrt{a})\,.$$

Soluzione. Ricordiamo che $\log_a(x)$ è l'esponente che bisogna dare ad a per ottenere x. Dato che vale sempre $a^{\mathbf{0}} = 1$ concludiamo che $\log_a(1) = 0$. Analogamente, dato che $a^1 = a$ concludiamo che $\log_a(a) = 1$. Infine $\log_a(a^2) = 2$ dato che 2 è l'esponente che occorre dare ad a per ottenere a^2. È anche chiaro a questo punto che $\log_a(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}$.

Esercizio 6. *Scrivere un' uguaglianza che colleghi tra loro le seguenti quantità :*

$$\log_{10}(\frac{54}{11})\,,\quad \log_{10}(2)\,,\quad \log_{10}(3)\,,\quad \log_{10}(11).$$

Soluzione. Ricordiamo che $\forall a \neq 1$

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)\,,\quad \log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)\,,\quad \log_a(x^b) = b\log_a(x)\,.$$

Scriviamo $54 = 2 \cdot 3^3$. Ma allora
$\log_{10}(\frac{54}{11}) = \log_{10}(54) - \log_{10}(11) = \log_{10}(2 \cdot 3^3) - \log_{10}(11) = \log_{10}(2) + 3\log_{10}(3) - \log_{10}(11)$.

Conclusione: $\log_{10}(\frac{54}{11}) = \log_{10}(2) + 3\log_{10}(3) - \log_{10}(11)$.

Esercizio 7. *Calcolare*

$$\log_2(\frac{1}{16})\,, \quad 2^{\log_2(512)}\,, \quad \log_{\sqrt{2}}(\sqrt[5]{\frac{1}{2}})$$

Soluzione. Dato che $\frac{1}{16} = 2^{-4}$ si ha, chiaramente, $\log_2(\frac{1}{16}) = -4$; infatti -4 è l'esponente che occorre dare a 2 per ottenere $\frac{1}{16}$. Dato che per la definizione stessa di logaritmo si ha

$$\forall x \in (0, \infty) \quad a^{\log_a(x)} = x$$

è chiaro che $2^{\log_2(512)} = 512$.
Per calcolare

$$\log_{\sqrt{2}}(\sqrt[5]{\frac{1}{2}})$$

osserviamo preliminarmente che

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}\,, \quad \sqrt[5]{\frac{1}{2}} = ((2^{-1}))^{\frac{1}{5}} = 2^{-\frac{1}{5}}$$

Ci domandiamo qual è l'esponente che bisogna dare a $2^{\frac{1}{2}}$ per ottenere $2^{-\frac{1}{5}}$; tale esponente è $-\frac{2}{5}$. Infatti

$$(2^{\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{5}} = 2^{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{2}{5})} = 2^{-\frac{1}{5}}\,.$$

Esercizio 8. *Determinare* $x \in (0, +\infty)$ *tale che* $\log_4(x) = 2$. *Ripetere l'esercizio per* $\log_7(x) = -2$.
Soluzione. Basta applicare la definizione: $\log_4(x)$ è l'esponente che occorre dare a 4 per ottenere x: quindi $4^{\log_4(x)} = x$; ma sappiamo che $\log_4(x) = 2$ e concludiamo allora che $x = 4^2 = 16$. Analogamente: $7^{\log_7(x)} = x$ e dato che $\log_7(x) = -2$ concludiamo che $x = 7^{-2} = 1/7^2 = 1/49$.

Esecizio 9. Determinare l'insieme di definizione (o dominio) delle seguenti funzioni:

$$(i)\ f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad (ii)\ f(x) = \log_{10}\Big(1 - |\frac{x}{2-3x}|\Big).$$

Soluzione. La prima funzione è definita per tutti gli x tali che $\cos^2 x \neq 0$. Cerchiamo allora gli x tali che $\cos^2 x = 0$ ed escludiamoli dal dominio. In generale, per un numero reale a si ha che $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$. Basta allora cercare gli x tali che $\cos x = 0$. Sappiamo che questi sono i valori

$$\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Conclusione:

$$\mathrm{Dom}(\frac{1}{\cos^2 x}) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Passiamo alla seconda funzione; per definizione di logaritmo dobbiamo determinare gli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$1 - |\frac{x}{2-3x}| > 0\,,$$

e cioè tali che $|2-3x| > |x|$. L'ultima disequazione si esplicita in 4 sistemini; quindi $|2-3x| > |x| \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2-3x \geq 0 \\ 2-3x \geq x \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x < 0 \\ 2-3x \geq 0 \\ 2-3x \geq -x \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x < 0 \\ 2-3x < 0 \\ -(2-3x) \geq -x \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ 2-3x \geq 0 \\ 2-3x \geq x \end{cases}$$

dove utilizziamo *o* invece di *oppure*. Risolvendo si ottiene

$$|2-3x| > |x| \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty).$$

Riassumendo

$$\mathrm{Dom}\left(\log_{10}(1 - |\frac{x}{2-3x}|)\right) = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty).$$