Matematica II

Facoltà di Ingegneria dell'Informazione, Informatica e Statistica

Corso di Laurea in Statistica, Economia, Finanza e Assicurazioni. - a.a. 2016-2017.

Primo compito a casa. Soluzioni.

Esercizio 1.
Se $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ allora esiste l'inverso moltiplicativo di b, denotato b^{-1}. Seguendo una notazione consolidata scriviamo il numero reale ab^{-1} come

$$\frac{a}{b}$$

Stabilire se le seguenti proprietà dei numeri reali sono vere o false.

(1)
$$\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$$

(2)
$$\frac{a^n}{n} = a$$

(3)
$$-x \leq -1 \;\Rightarrow\; x < 1$$

(4)
$$\frac{(\frac{a}{b})}{b} = a$$

(5)
$$\frac{a}{c} \geq 1 \Rightarrow a \geq c$$

(6)
$$\sqrt{(-2)^2} = -2$$

(7)
$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b \quad a, b > 0$$

Soluzione.

(1) Falsa. **Non** è vero che $(b+c)^{-1} = b^{-1} + c^{-1}$ (la funzione $f(x) = 1/x$ non è lineare).

(2) Falsa. a^n vuol dire $(aaa\cdots a)$ n volte e questa quantità non può certo essere semplificata con il denominatore.

(3) Falsa. Per ottenere x ed 1 dalla disuguaglianza data dobbiamo moltiplicarla per (-1). Ma sappiamo che $\alpha \leq \beta$, $\gamma < 0$ implica che $\gamma\alpha \geq \gamma\beta$. Quindi $-x \leq -1 \;\Rightarrow\; x \geq 1$.

(4) Falsa. L'espressione data è uguale a $(ab^{-1})b^{-1}$ che per la proprietà associativa è uguale a $a(b^{-1}b^{-1})$ che è uguale a ab^{-2}.

(5) Falsa per una ragione già spiegata sopra (se $c < 0$, moltiplicando la disuguaglianza data per c il verso della disuguaglianza si scambia; è invece vero che $\frac{a}{c} \geq 1, c > 0 \Rightarrow a \geq c$).

(6) Falsa. In generale $\sqrt{x^2} = |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(7) Falsa. La radice quadrata non è una funzione lineare.

Esecizio 2. Determinare, se esistono, le soluzioni delle equazioni

$$|x+10| = 3\,, \quad |x+5| = -2\,, \quad x = 4 - 3|x|\,.$$

Soluzione. La seconda equazione non ha soluzione perché il valore assoluto è sempre maggiore o uguale a 0. Determiniamo le soluzioni dell'equazione $x = 4 - 3|x|$. Per definizione $|x| = x$ se $x \geq 0$ e $|x| = -x$ se $x < 0$. Ne segue che l'equazione può essere riscritta come segue

$$x = 4 - 3x \;\text{ se }\; x \geq 0\,, \quad x = 4 + 3x \;\text{ se }\; x < 0$$

La prima equazione ha soluzione $x = 1$ che è una soluzione accettabile dato che $1 > 0$.
La seconda equazione ha soluzione $x = -2$ che è anche accettabile dato che $-2 < 0$.
Conclusione: le soluzioni dell'equazione $x = 4 - 3|x|$sono $x = 1$, $x = -2$.
Determiniamo infine le soluzioni dell'equazione $|x+10| = 3$. Per definizione $|x+10|$ è uguale a $x+10$ se $x \geq -10$ ed è uguale a $-x-10$ se $x < -10$. Nel primo caso otteniamo $x + 10 = 3$ e quindi $x = -7$ che è accettabile perché $-7 < -10$. Nel secondo caso otteniamo $-x - 10 = 3$ e cioè $x = -13$ che è anche accettabile perché $-13 < -10$. Conclusione: le soluzioni dell'equazione $|x + 10| = 3$ sono $x = -7$ e $x = -13$.

Esecizio 3. Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ è verificato il sistema

$$\begin{cases} |x| > 2\,, \\ x^2 + 4x < 0\,. \end{cases}$$

Soluzione. Riscriviamo il sistema utilizzando la definizione di modulo. Il sistema è soddisfatto $\Leftrightarrow$:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x > 2 \\ x^2 + 4x < 0 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x < 0 \\ -x > 2 \\ x^2 + 4x < 0 \end{cases}$$

Consideriamo il primo sistema: l'unica disequazione da studiare veramente è la terza. Potete applicare il metodo noto e scoprite che è soddisfatta per $x \in (-4, 0)$ (valori interni). Ma allora il primo sistama non è soddisfatto da alcun x (è ovvio che non ci sono x che sono simultaneamente in $(-4, 0)$ (e quindi negativi) e in $(2, \infty)$). In altre parole *non* esiste $x \in \mathbb{R}$ che soddisfa *simultaneamente* le 3 disequazioni. Consideriamo il secondo sistema che è equivalente a

$$\begin{cases} x < 0 \\ x < -2 \\ x^2 + 4x < 0 \end{cases}$$

È chiaro che la soluzione è data da tutti gli $x \in (-4, -2)$. Conclusione: il sistema dato è soddisfatto da ogni $x \in (-4, -2)$.

Esecizio 4. Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ è verificata la disequazione:

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x - 6} \geq 0\,.$$

Soluzione. Una frazione è maggiore o uguale a zero quando numeratore e denominatore sono entrambi positivi oppure entrambi negativi (ma ovviamente il denominatore non si deve annullare) Quindi

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x - 6} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 4 \geq 0 \\ (x-6) > 0 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x^2 + 3x - 4 \leq 0 \\ (x-6) < 0 \end{cases}$$

Studiamo allora il segno del numeratore e del denominatore. Per il numeratore: la disequazione $x^2 + 3x - 4 \geq 0$ è soddisfatta per $x \in (-\infty, -4] \cup [1, +\infty)$ (lascio a voi i dettagli). Quindi il numeratore è ≥ 0 in $(-\infty, -4] \cup [1, +\infty)$ ed è invece < 0 in $(-4, 1)$. Il denominatore è strettamente positivo per $x \in (6, \infty)$, si annulla per $x = 6$ (valore che va quindi escluso perché 0 non è ammesso al denominatore) ed è strettamente negativo per $x < 6$.

Conclusione: $\frac{x^2+3x-4}{x-6} \geq 0$ per $x \in [-4, 1] \cup (6, \infty)$.