Matematica secondo corso

Proff. P. Papi, P. Piazza

Soluzioni compito in classe del 7/4/2017.

Esercizio 1. Di ciascuna delle seguenti successioni dire (motivando la risposta) se è convergente, divergente, indeterminata, e se è convergente determinarne il limite:

$$a_n = (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n^3}\right), \qquad b_n = \frac{1}{\log(n^4)\sin(-\frac{1}{n})}, \qquad c_n = (-1)^n \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right).$$

Risoluzione:
La successione a_n è indeterminata; infatti $\cos\left(\frac{1}{n^3}\right)$ converge ad 1 ma $(-1)^n$ oscilla fra 1 ed -1 a seconda che n sia pari o dispari. Quindi i termini della successione si accumulano verso 1 e -1 e non esiste il limite.
Riscriviamo la successione b_n come segue

$$b_n = -\frac{1}{\frac{1}{n}\log(n^4)\frac{\sin(-\frac{1}{n})}{(-\frac{1}{n})}}$$

Sappiamo che $\log(n^4)/n$ è positivo per $n > 1$ e tende a zero per $n \to +\infty$; sappiamo anche che

$$\frac{\sin(-\frac{1}{n})}{(-\frac{1}{n})} \to 1 \quad \text{quando} \quad n \to +\infty$$

quindi b_n diverge verso $-\infty$.
La successione c_n è convergente a $\ell = 0$: infatti è il prodotto di una successione limitata, $(-1)^n$, e di una successione infinitesima, $\sin\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$, ed è quindi infinitesima.

Esercizio 2. Utilizzando la formula di Taylor determinare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x\cos x - x}. \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x\sin(1/x)}{\log(1+\sqrt{x})}..$$

Risoluzione:
Dimostriamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x\cos x - x} = \frac{1}{3}. \tag{1}$$

I polinomi di Taylor a $x = 0$ di $\sin x$ e $\cos x$ danno

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

Quindi

$$\frac{\sin x - x}{x\cos x - x} = \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{-\frac{x^3}{2} + o(x^4)} = \frac{-\frac{1}{6} + o(x)}{-\frac{1}{2} + o(x)},$$

da cui segue (1). In alternativa si può applicare L'Hôpital. Siano $f(x) = \sin x - x$ e $g(x) = x\cos x - x$. Si trova che

$$f(0) = g(0) = 0, \quad f'(0) = g'(0) = 0, \quad f''(0) = g''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad g'''(0) = -3,$$

e segue (1).
Dimostriamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\sin(1/x)}{\log(1+\sqrt{x})} = 0. \tag{2}$$

Per dimostrare (2), notiamo che, sviluppando con Taylor a $x = 0$ la funzione $f(x) = \log(1+t)$, si ottiene

$$\log(1+t) = t + o(t).$$

Ponendo $t = \sqrt{x}$, si ottiene

$$\log(1+\sqrt{x}) = \sqrt{x} + o(\sqrt{x}).$$

Quindi,

$$\frac{x\sin(1/x)}{\log(1+\sqrt{x})} = \frac{x\sin(1/x)}{\sqrt{x}+o(\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x}\sin(1/x)}{1+o(\sqrt{x})/\sqrt{x}}. \tag{3}$$

Ora, $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\sin(1/x) = 0$, perchè $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = 0$ e la funzione $\sin(1/x)$ è limitata. Da ciò, e da (3), segue immediatamente (2).

Esercizio 3. Sia

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{x-1}.$$

(3a) Determinate $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

(3b) Determinate il dominio di definizione di $f(x)$.

(3c) Determinate gli asintoti verticali del grafico di $f(x)$.

(3d) Determinate punti di max/min di $f(x)$, e gli intervalli su cui $f(x)$ è crescente/decrescente.

(3e) Disegnate il grafico di $f(x)$.

Risoluzione:

(3a) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

(3b) Il dominio di definizione di $f(x)$ è $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

(3c) Gli asintoti verticali del grafico di $f(x)$ sono $x = -1$ e $x = 1$, perchè

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty.$$

(3d) La derivata di f è

$$f'(x) = -e^{\frac{1}{x+1}} \frac{x(x+3)}{(x^2-1)^2}.$$

Segue che f è decrescente su $(-\infty, -3]$, su $[0, 1)$ e su $(1, +\infty)$, la f è crescente su $(-3 - 1)$ e su $(-1, 0]$. La f ha un minimo (relativo) per $x = -3$, e un massimo (relativo) per $x = 0$.