Algebra 1

Proff. A. De Sole, P. Piazza e E. Spinelli

Primo Esonero

23 Aprile 2012

Nome e Cognome: *Alberto De Sole*

Numero di Matricola: *1234567890*

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	6
2	6	6
3	6	6
4	6	6
5	6	6
Totale	30	30

Giustificate le risposte!

Esercizio 1. (a) Si determini se la funzione $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, data da $f(m, n) = 3^m 7^n$, è iniettiva e/o surettiva.

(b) Si determini la cardinalità dell'insieme $S = \{\alpha \in \mathbb{R} \,|\, \alpha = 3^m 7^n \text{ per qualche } m, n \in \mathbb{N}\}$.

Soluzione:

f è iniettiva (per l'unicità della fattorizzazione in primi) e non è suriettiva perchè, ad esempio, 2 non è nell'immagine di f.

Chiaramente S è proprio l'immagine di f. Quindi $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to S$ è biunivoca, e quindi $Card(S) = Card(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = Card(\mathbb{N})$.

Risposta:

(a) *Cerchiare la risposta:* La funzione f è iniettiva? **SI** – **NO**. La funzione f è suriettiva? **SI** – **NO**

(b) Card(S)= $\boxed{|\mathbb{N}|}$

Esercizio 2. Dati due interi $a, b \in \mathbb{Z}$, si consideri il seguente sistema di equazioni alle congruenze:

$$\begin{cases} 2x + 4 \equiv 0 & \mathrm{Mod}(6)\,, \\ 3x \equiv a & \mathrm{Mod}(10)\,, \\ 5x \equiv b & \mathrm{Mod}(35)\,. \end{cases}$$

Determinare per quali valori dei parametri a e b in $\mathbb{Z}$ il sistema ammette almeno una soluzione $x \in \mathbb{Z}$.

Soluzione:

L'equazione $2x+4 \equiv 0\,\mathrm{Mod}(6)$ è equivalente, dividendo per 2, a $x+2 \equiv 0\,\mathrm{Mod}(3)$, che è equivalente a $x \equiv 1\,\mathrm{Mod}(3)$. L'equazione $3x \equiv a\,\mathrm{Mod}(10)$ è equivalente, moltiplicando per $3^{-1} \equiv 7(10)$, a $x \equiv 7a\,\mathrm{Mod}(10)$. Infine, l'equazione $5x \equiv b\,\mathrm{Mod}(35)$ ammette soluzioni se e solo se $5 = MCD(5,35) \,\big|\, b$. Ovvero se $b = 5b'$, per qualche $b' \in \mathbb{Z}$. In tal caso l'equazione è equivalente a $x \equiv b'\,\mathrm{Mod}(7)$.

Dunque, se $b \notin 5\mathbb{Z}$, il sistema non ammette soluzioni, mentre se $b = 5b' \in 5\mathbb{Z}$, il sistema è equivalente al sistema cinese

$$\begin{cases} x \equiv 1 & \mathrm{Mod}(3)\,, \\ x \equiv 7a & \mathrm{Mod}(10)\,, \\ x \equiv b' & \mathrm{Mod}(7)\,, \end{cases}$$

che ammette sempre soluzioni, per il Teorema Cinese dei Resti, poichè 3, 10 e 7 sono a due a due coprimi.

Risposta:

Il sistema ammette soluzioni per (a, b): $\boxed{a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in 5\mathbb{Z}}$

Esercizio 3. (a) Si determini per quali valori dell'intero $n \geq 1$ si ha un omomorfismo (ben definito) di anelli $f : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}/n$ dato da $f(a + ib) = \overline{a + 5b} \in \mathbb{Z}/n$.

(b) Se n è come nella parte (a), si verifichi che $J = \{a + ib \in \mathbb{Z}[i] \text{ tale che } n \mid a + 5b\}$ è un ideale di $\mathbb{Z}[i]$. Determinare inoltre per quali valori di n tale ideale è massimale.

Soluzione:
(a) f si ottiene a partire dall'omomorfismo $\tilde{f} : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}/n$, dato da $\tilde{f}(x) = \bar{5}$, passando al quoziente $\mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1)$. Dunque f è ben definito se e solo se $\tilde{f}(x^2 + 1) = 0$, ovvero se e solo se $26 \equiv 0(n)$. Che vuol dire che $n \geq 1$ è un divisore di $26 = 2 \times 13$. Dunque le uniche possibilità sono $n = 1, 2, 13, 26$.

(b) Chiaramente $J = \ker(f)$, e dunque è automaticamente un ideale di $\mathbb{Z}[i]$. Inoltre f è chiaramente suriettiva, dunque, dal teorema di isomorfismo, f induce un isomorfismo di anelli $\mathbb{Z}[i]/J \simeq \mathbb{Z}/n$. Allora $J \subset \mathbb{Z}[i]$ è massimale se e solo se $\mathbb{Z}[i]/J \simeq \mathbb{Z}/n$ è un campo, ovvero se e solo se n è primo. Dunque le uniche possibilità sono $n = 2, 13$.

Risposta:

(a) f è un omomorfismo per $n =$ $\boxed{1,2,13,26}$

(b) $J \subset \mathbb{Z}[i]$ è un ideale massimale per $n =$ $\boxed{2,13}$

Esercizio 4. Determinare tutti (a meno di isomorfismo) i gruppi abeliano di ordine 120 con almeno un elemento di ordine 4.

Soluzione:

Per il teorema di classificazione, i gruppi abeliani finiti sono, a meno di isomorfismo, $\mathbb{Z}/d_1 \times \mathbb{Z}/d_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_r$, con $1 < d_1 \mid d_2 \mid \ldots \mid d_r$.

Se vogliamo che l'ordine sia 120, dobbiamo avere $d_1 d_2 \ldots d_r = 120 = 2^3 \times 3 \times 5$. È facile capire che, allora, le uniche possibilità sono:

(i) $d_1 = 2, d_2 = 2, d_3 = 2 \times 3 \times 5 = 30$,

(ii) $d_1 = 2, d_2 = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$,

(iii) $d_1 = 2^3 \times 3 \times 5 = 120$.

È facile varificare che nel caso (i) non c'è nessun elemento di ordine 4, mentre nei casi (ii) e (iii) ci sono elementi di ordine 4.

Risposta:

Lista dei gruppi abeliani di ordine 120 con almeno un elemento di ordine 4:

$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/60$ e $\mathbb{Z}/120$.

Esercizio 5. Sia A un anello commutativo con unità con la proprietà che, per ogni $x \in A$, esiste un intero $n > 1$ tale che $x^n = x$. Dimostare che un ideale $I \subset A$ è primo se e solo se è massimale.

Soluzione:
Sia $I \subset A$ un ideale primo, e consideriamo l'anello quoziente A/I, che è un dominio. Per ogni $0 \neq \bar{x} \in A/I$ abbiamo $\bar{x}^n = \bar{x}$ per qualche $n \geq 2$, ovvero $\bar{x}(\bar{x}^{n-1} - 1) = 0$. Dunque, poichè A/I è un dominio e $\bar{x} \neq 0$, segue che $\bar{x}^{n-1} = 1$, ovvero $\bar{x}$ è invertibile in A/I (l'inverso essendo $\bar{x}^{-1} = \bar{x}^{n-2}$). In conclusione, ogni elemento non nullo in A/I è invertibile, ovvero A/I è un campo, ovvero $I \subset A$ è massimale.