**Geometria 1. I$^0$ Modulo. a.a. 00/01. Gruppo E-N**
**Soluzione esercizi per casa del 21/12/00**

**Soluzione esercizio 1.** Daremo 4 soluzioni equivalenti di questo esercizio.
**Soluzione n. 1.** Faremo uso della formula vista nella Sezione 4 del Capitolo 5. In questo caso $V = W(= \mathbb{R}^3)$. Consideriamo la base

$$\underline{e}'_1 = (1,1,0) \quad \underline{e}'_2(0,1,1)\,, \quad \underline{e}'_3 = (0,0,1)$$

I dati del problema forniscono immediatamente la matrice $A$ associata ad $F$ rispetto alla seguente scelta di basi:

$$\text{base di partenza} = \{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\}\,, \quad \text{base di arrivo} = \text{base canonica}\,.$$

Vi ricordo che tale matrice è, per definizione, la matrice che ha come $j$-ma colonna le coordinate, nella base di arrivo, del vettore $F(\underline{e}'_j)$. Ma questa è proprio l'informazione che ci viene data dal testo del problema. Quindi

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\,.$$

Vogliamo ora determinare la matrice $B$ associata ad $F$ rispetto alla scelta di basi

$$\text{base di partenza} = \text{base canonica}\,, \quad \text{base di arrivo} = \text{base canonica}\,.$$

Lo schema è il seguente

$$\begin{array}{lll} A \ \text{ associata a} & \{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\}\,, & \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}. \\ B \ \text{ associata a} & \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}\,, & \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}. \end{array}$$

Per la formula vista a lezione

$$B = I_3^{-1}\, A\, M = A\, M$$

con $I_3$ la matrice identità e con $M$ la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori della base $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ rispetto alla base $\{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\}$. Questa matrice $M$ è al momento sconosciuta; d'altra parte essa è l'inversa della matrice $M'$ che ha come colonne le coordinate dei vettori $\{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\}$ nella base $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ (che è la base canonica). Quest'ultima matrice è invece nota perché è data nel testo del problema

$$M' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\,.$$

Quindi

$$(1) \qquad B = A\,(M')^{-1}\,, \qquad (M')^{-1} = M\,;$$

calcolando l'inversa otteniamo

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Concludendo

$$B = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Possiamo ora utilizzare $B$ per rispondere all'ultimo quesito dell'esercizio. Il rango di $B$ è due come subito si verifica applicando Gauss-Jordan oppure calcolando il determinante di $B$ e verificando che è uguale a zero. L'immagine di $F$ è quindi generata da due vettori colonna di $B$ non-proporzionali, ad esempio il primo ed il secondo; ne segue che l'immagine di $F$ ha equazioni cartesiane

$$\det \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\,, \quad \text{ovvero } \; x_1 + x_3 = 0\,.$$

Il nucleo di $F$ è il sottospazio vettoriale soluzione del sistema lineare omogeneo $B\underline{x} = \underline{0}$. Già sappiamo che $\mathrm{Ker}F$ è un sottospazio di dimensione $3 - 2 = 1$, cioè una retta. Dal fatto che il rango di $B$ è due segue anche che la terza riga di $B$ è combinazione lineare delle prime due. Quindi

$$\mathrm{Ker}F = \{\underline{x} \,|\, \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \}$$

e queste sono proprio le equazione cartesiane di $\mathrm{Ker}F$. In alternativa, se avete utilizzato Gauss-Jordan allora ottenete subito le equazioni cartesiane di $\mathrm{Ker}F$ dalla matrice ridotta $S$ associata a $B$.
Un generatore di $\mathrm{Ker}F$ è $(1, -1, 1)$, quindi $\mathrm{Ker}F = \mathbb{R}(1, -1, 1)$ (ma questa informazione non era richiesta).

**Soluzione n. 2.** Siano $\underline{x}$ le coordinate associate alla base canonica e siano $\underline{x}'$ le coordinate associate alla base $\{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\}$. I dati del problema ci permettono di scrivere le coordinate $\underline{y}$ di $F(\underline{v})$ in funzione delle coordinate $\underline{x}'$ di $\underline{v}$ rispetto alla base $\{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\}$. Quindi

$$\underline{y} = A\,\underline{x}'$$

con $A$ la matrice che ha come $j$-ma colonna le coordinate, nella base canonica, del vettore $F(\underline{e}'_j)$. Tutto ciò è stato visto a lezione; più precisamente abbiamo visto a lezione che questa scrittura è una conseguenza della linearità di $F$. Ma allora

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Noi siamo invece interessati alle coordinate $\underline{y}$ di $F(\underline{v})$ in funzione delle coordinate $\underline{x}$ di $\underline{v}$ rispetto alla base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$; quindi

$$\underline{y} = B\underline{x}\,,$$

con $B$ uguale alla matrice che ha come colonne le coordinate di $F(\underline{e}_j)$ nella base $\{\underline{e}_i\}$.
Per determinare $B$ procediamo come nella dimostrazione della formula che lega le due matrici $A$ e $B$; sappiamo che $\underline{x} = M'\underline{x}'$ con $M'$ la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori $\{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\}$ nella base $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ ; quindi $\underline{x}' = (M')^{-1}\underline{x}$. Sostituendo otteniamo

$$\underline{y} = A\,(M')^{-1}\underline{x}\,,$$

da cui segue che

$$B = A\,(M')^{-1}$$

che è proprio la formula trovata in (1). Il resto dell'esercizio è come nella soluzione n. 1.

**Soluzione n. 3** Facciamo uso della formula magica spiegata nei complementi distribuiti il 21/12/00. Sia $\mathbb{E}$ la base canonica e sia $\mathbb{E}'$ la base $\{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\}$. Vogliamo determinare $M_{\mathbb{E},\mathbb{E}}(F)$. È bene capire quali sono le informazioni di cui siamo in possesso: il testo dell'esercizio ci dà $M_{\mathbb{E},\mathbb{E}'}(F)$ e $M_{\mathbb{E},\mathbb{E}'}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ [1]. La formula magica ci dice che

$$M_{\mathbb{E},\mathbb{E}}(F) = M_{\mathbb{E},\mathbb{E}'}(F)\, M_{\mathbb{E}',\mathbb{E}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$$
$$M_{\mathbb{E}',\mathbb{E}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\, M_{\mathbb{E},\mathbb{E}'}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = M_{\mathbb{E}',\mathbb{E}'}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = I_3$$

Ma allora

$$M_{\mathbb{E},\mathbb{E}}(F) = M_{\mathbb{E},\mathbb{E}'}(F)\,(M_{\mathbb{E},\mathbb{E}'}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}))^{-1}$$

e ritroviamo per la terza volta la stessa soluzione.

**Soluzione n. 4.** Usiamo la linearità di $F$ come nell'esercizio 1 del 15/12/00 (erroneamente distribuito come compito a casa del 7/11/00) . Vogliamo calcolare le coordinate di $F(\underline{e}_1)$, $F(\underline{e}_2)$, $F(\underline{e}_3)$ nella base canonica; queste saranno le colonne della matrice cercata. Esprimiamo allora $\underline{e}_1$ come combinazione lineare degli elementi della nuova base $\{\underline{e}'_j\}$, perché è su questi vettori che sappiamo calcolare $F$, ed applichiamo la linearità di $F$. In questo caso l'espressione di $(1,0,0)$ in funzione di $\{\underline{e}'_j\}$ è molto facile a stabilirsi:

$$(1,0,0) = (1,1,0) - (0,1,1) + (0,0,1)$$

Quindi
$F(1,0,0) = F((1,1,0) - (0,1,1) + (0,0,1)) = F(1,1,0) - F(0,1,1) + F(0,0,1) =$
$(1,2,-1) - (-1,1,1) + (-1,0,1) = (1,1-1)$
che è proprio la prima colonna della matrice $B$ trovata nella soluzione n. 1. Analogamente
$F(0,1,0) = F((0,1,1) - (0,0,1)) = F(0,1,1) - F(0,0,1) =$
$(-1,1,1) - (-1,0,1) = (0,1,0)$
che è la seconda colonna della matrice $B$. Notiamo che $F(0,0,1)$ è dato nel testo dell'esercizio. La soluzione è completa (ritroviamo $B$, come deve essere).

**Osservazione.** In questo caso era particolarmente semplice scrivere le coordinate dei vettori della base canonica rispetto alla base $\{\underline{e}'_j\}$. In generale bisognerà impostare 3 sistemi $3 \times 3$ o, più intelligentemente, scrivere la matrice che dà le coordinate di $\{\underline{e}'_j\}$ rispetto a $\{\underline{e}_i\}$ e poi prenderne l'inversa (che è ciò che abbiamo fatto nella soluzione n. 1).

**Soluzione esercizio 2 .** Concettualmente identica alla soluzione dell'esercizio 1 (e potete scegliere il metodo che preferite). La matrice associata a $S$ nella base canonica è

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

**Soluzione esercizio 3.** La matrice $A$ ha rango 2. La matrice $B$ ha anche rango 1. L'immagine di $S$ è quindi generata da $(1,-1,-1)$. Il nucleo di $T$ ha dimensione

[1] Infatti, come già osservato

$$M_{\mathbb{E},\mathbb{E}'}(F) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_{\mathbb{E},\mathbb{E}'}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$3-2=1$ ed è quindi generato da un unico vettore non nullo. Per verificare che $\mathrm{Ker}T = \mathrm{Im}S$ basta allora verificare che $(1,-1,-1)$ appartiene al nucleo di $T$. Ma $T(1,-1,-1)$ è dato da

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

che è uguale appunto al vettore nullo. Abbiamo quindi verificato che $\mathrm{Ker}T = \mathrm{Im}S$. L'immagine di $T$ ha dimensione 2 (perché $A$ ha rango 2) e il nucleo di $S$ ha anche dimensione 2 (perché $B$ ha rango 1). Il nucleo di $S$ è dato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo $B\underline{x} = \underline{0}$. Dato che in $B$ c'è una sola riga linearmente indipendente questo sistema si riduce ad un'unica equazione lineare omogenea, l'equazione

$$x_1 - x_2 - 3x_3 = 0\,.$$

Notiamo subito che il secondo vettore colonna di $A$, che è certamente nell'immagine di $T$ (essendo $T(0,1,0)$), non verifica questa equazione. Ne segue che $\mathrm{Im}T \neq \mathrm{Ker}S$. Infine, abbiamo già visto che l'immagine di $T$, che è generata dalla colonne di $A$, ha dimensione 2; basta allora verificare che $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ appartengono all'immagine. Ma $\underline{v}_1$ è la somma delle prime due colonne di $A$ e $\underline{v}_2$ è la somma della prima e terza colonna di $A$; ne segue che questi due vettori, che non sono proporzionali, appartengono all'immagine di $T$ che ha dimensione 2 e sono quindi una base per questo sottospazio.

**Soluzione esercizio 4.** Ci sono anche in questo caso varie soluzioni possibili. Usiamo la linearità di $P$ come nella soluzione n. 4 dell'esercizio 1. Dobbiamo esprimere $P\underline{g}_j$ come combinazione lineare di $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$; i coefficienti di questa combinazione lineare ci danno la $j$-ma colonna della matrice cercata. Iniziamo dalla prima colonna. Si ha: $\underline{g}_1 = (2,0,1) = 2\underline{e}_1 + \underline{e}_3$; ne segue, per linearità, che

$$P\underline{g}_1 = P(2\underline{e}_1 + \underline{e}_3) = 2P\underline{e}_1 + P\underline{e}_3\,;$$

utilizzando la definizione di $P$ otteniamo allora

$$P\underline{g}_1 = 2(2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3) + (\underline{g}_2 + \underline{g}_3) = 4\underline{g}_1 + \underline{g}_2 - 3\underline{g}_3$$

Abbiamo quindi determinato la prima colonna della matrice cercata. Analogamente si procede per le altre due colonne:

$$P\underline{g}_2 = P(\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2) = P\underline{e}_1 + 3P\underline{e}_2 = 2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3 + 3\underline{g}_2 + 3\underline{g}_3 = 2\underline{g}_1 + 3\underline{g}_2 + \underline{g}_3$$

$$P\underline{g}_3 = P(\underline{e}_2 + 2\underline{e}_3) = P\underline{e}_2 + 3P\underline{e}_3 = \underline{g}_2 + \underline{g}_3 + 3\underline{g}_1 + 3\underline{g}_2 + 3\underline{g}_3 = 3\underline{g}_1 + 4\underline{g}_2 + 4\underline{g}_3$$

La matrice cercata è

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

**Soluzione esercizio 5.**
(5.1) I vettori

$$\underline{v}_1 = (1,1,-1,1) \qquad \underline{v}_2 = (1,-1,1,1)$$

sono rispettivamente la prima e seconda colonna della matrice $A$. Sono quindi 2 vettori linearmente indipendenti del sottospazio $\mathrm{Im}\,T$. Dal testo dell'esercizio è chiaro che dobbiamo semplicemente verificare che la terza e quarta colonna sono combinazioni lineari della prima e seconda; ma questo è chiaro, la terza è la somma della prima e della seconda, mentre la quarta ne è la differenza. In definitiva $\mathrm{Im}T$ è

generato dai due vettori linearmente independenti costituiti dalla prima e seconda colonna, cioè da $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$, come volevasi dimostrare.
(5.2) Per scrivere equazioni cartesiane del sottospazio $\mathrm{Im}\, T$ determiniamo le equazioni parametriche ed eliminiamo i parametri. Le equazioni parametriche di $\mathrm{Im}T$ sono:

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} + t' \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

che riscriviamo come

$$\begin{cases} x_1 = t + t' \\ x_2 = t - t' \\ x_3 = -t + t' \\ x_4 = t + t' \end{cases}$$

Dalla prima e quarta equazione otteniamo $x_1 = x_4$ e dalla seconda e terza equazione otteniamo $-x_2 = x_3$; quindi le equazioni cartesiane di $\mathrm{Im}T$ sono

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Per controllare che non ci siano stati errori di calcolo basta verificare che i due vettori-base di $\mathrm{Im}T$, $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$, soddisfano questo sistema. Ma questo è chiaro. La soluzione è completa.

**Soluzione esercizio 6.** Vi ricordo il testo della prima parte dell'esercizio 4 del 15/12/00:
*Sia $V$ lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Sia $\pi$ un sottospazio vettoriale di dimensione 2, cioè un piano, ed $r$ una retta non contenuta in $\pi$. Sappiamo che ogni vettore $\underline{w}$ di $\mathbb{R}^3$ si scrive in maniera unica come $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$ con $\underline{w}_1 \in r$ e $\underline{w}_2 \in \pi$. Equivalentemente: $V = r \oplus \pi$. Definiamo un'applicazione $P_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ associando a $\underline{w} \in \mathbb{R}^3$ il vettore $\underline{w}_1 \in \mathbb{R}^3$ : quindi $P_1(\underline{w}) = \underline{w}_1$ per definizione.*
**4.1** *Verificare che l'applicazione $P_1$ è lineare. Essa è, per definizione, la proiezione su $r$ parallelamente a $\pi$.*

Verifichiamo che

$$P_1(\underline{w} + \underline{u}) = P_1(\underline{w}) + P_1(\underline{u})\,; \tag{2}$$

possiamo certamente scrivere $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$, con $\underline{w}_1 \in r$ e $\underline{w}_2 \in \pi$. Analogamente per $\underline{u}$; $\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$, con $\underline{u}_1 \in r$ e $\underline{u}_2 \in \pi$. Per definizione:

$$P_1 \underline{w} = \underline{w}_1\,, \quad P_1 \underline{u} = \underline{u}_1\,.$$

A destra della formula (2), che è la formula che vogliamo verificare, c'è quindi $\underline{w}_1 + \underline{u}_1$. D'altra parte, consideriamo il vettore $\underline{w} + \underline{u}$; possiamo scrivere questo vettore come

$$\underline{w} + \underline{u} = (\underline{w}_1 + \underline{w}_2) + (\underline{u}_1 + \underline{u}_2) = (\underline{w}_1 + \underline{u}_1) + (\underline{w}_2 + \underline{u}_2)$$

A destra c'è una decomposizione di $\underline{w} + \underline{u}$ come somma di un vettore in $r$ e di un vettore in $\pi$; ma questa decomposizione è unica, perché $\mathbb{R}^3 = r \oplus \pi$, e quindi

$$\underline{w} + \underline{u} = (\underline{w}_1 + \underline{u}_1) + (\underline{w}_2 + \underline{u}_2)$$

è **la** decomposizione di $\underline{w} + \underline{u}$ secondo la somma diretta $r \oplus \pi$, quindi

$$P_1(\underline{w} + \underline{u}) = \underline{w}_1 + \underline{u}_1$$

Ne segue che

$$P(\underline{w}+\underline{u}) = P_1\underline{w}_1 + P\underline{u}_1$$

che è quello che dovevamo verificare. Analogamente si verifica che $P(\alpha\underline{v}) = \alpha P(\underline{v})$, $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, $\forall\underline{v} \in \mathbb{R}^3$. Ne segue che $P_1$ è lineare. Richiamo ora la parte rimanente del testo dell'esercizio 4 del 15/12:
*La legge $\underline{w} \longrightarrow \underline{w}_2$ definisce la proiezione su $\pi$ parallelamente a $r$; questa è anche un'applicazione lineare ed è denotata tramite $P_2$. Quindi $P_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $P_2(\underline{w}) = \underline{w}_2$.*
*Abbiamo altre due applicazione lineari definite dalla decomposizione $\mathbb{R}^3 = \pi \oplus r$. La simmetria $S_1$ rispetto a $r$ parallelamente a $\pi$ e la simmetria $S_2$ rispetto a $\pi$ parallelamente a $r$:*

$$S_1(\underline{w}) = \underline{w}_1 - \underline{w}_2 \qquad S_2(\underline{w}) = \underline{w}_2 - \underline{w}_1 .$$

**4.2** *Disegnate $\pi$, $r$ ed un generico $\underline{w} \in \mathbb{R}^3$ con $\underline{w} \notin r$, $\underline{w} \notin \pi$; sul disegno indicate $P_1(\underline{w})$, $P_2(\underline{w})$, $S_1(\underline{w})$, $S_2(\underline{w})$.*
**4.3**. *Determinare l'immagine ed il nucleo di $P_1$ e $P_2$. Spiegare perché $S_1$ e $S_2$ sono biunivoche.*

La verifica che $P_2$, $S_1$, $S_2$ sono applicazione lineari è del tutto analoga alla verifica che abbiamo fatto per $P_1$. Per rispondere a **4.3** osserviamo che l'immagine di $P_1$ è necessariamente uguale alla retta $r$. Il nucleo di $P_1$ è quindi di dimensione $3-1=2$. Un vettore $\underline{w}$ del piano $\pi$ si scrive ovviamente come $\underline{w} = \underline{0} + \underline{w}$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = r \oplus \pi$. Quindi $P_1\underline{w} = \underline{0}$, $\forall\underline{w} \in \pi$ (proprio per definizione di $P_1$; questo è anche chiaro dalla figura). Ne segue che $\pi \subset \mathrm{Ker}P_1$ e dato che $\pi$ e $\mathrm{Ker}P_1$ hanno entrambi dimensione 2, ne segue che $\mathrm{Ker}P_1 = \pi$. In definitiva:

$$\mathrm{Im}P_1 = r\,, \qquad \mathrm{Ker}P_1 = \pi\,.$$

Analogamente

$$\mathrm{Im}P_2 = \pi\,, \qquad \mathrm{Ker}P_2 = r\,.$$

Aiutatevi con la figura.
Per verificare che $S_1$ e $S_2$ sono biunivoche basta verificare che sono aaplicazioni iniettive (perché ?!); verifichiamolo per $S_1$, la dimostrazione per $S_2$ è concettualmente identica. Ma

$$S_1\underline{w} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{w}_1 - \underline{w}_2 = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{w}_1 = \underline{w}_2;$$

poniamo $\underline{g} = \underline{w}_1 = \underline{w}_2$. Certamente $\underline{g} \in r$ (perché $\underline{w}_1 \in r$) e $\underline{g} \in \pi$ (perché $\underline{w}_2 \in \pi$) e dato che $\pi \cap r = \underline{0}$ ne segue che $\underline{g} = \underline{0}$; quindi $\underline{w}_1 = \underline{0}$ e $\underline{w}_2 = \underline{0}$ e quindi $\underline{w} = \underline{0}$. Ne segue che $\mathrm{Ker}S_1 = \underline{0}$.

**Soluzione esercizio 7.** Dobbiamo verificare che sussistono le seguenti identità:

$$(P_1)^2 = P_1\,; \quad (P_2)^2 = P_2\,; \quad P_2 = \mathrm{Id} - P_1\,; \quad S_1 = \mathrm{Id} - 2P_2\,; \quad S_2 = 2P_2 - \mathrm{Id}\,.$$

Per definizione $(P_1)^2(\underline{w}) = P_1(P_1(\underline{w})) = P_1(\underline{w}_1)$; d'altra parte $P_1(\underline{w}) = P_1(\underline{w}_1 + \underline{w}_2) = P_1(\underline{w}_1) + P_1(\underline{w}_2) = P_1\underline{w}_1 + \underline{0}$ (perché $\underline{w}_2 \in \pi = \mathrm{Ker}P_1$). Quindi $(P_1)^2(\underline{w}) = P_1(\underline{w})$, $\forall\underline{w} \in \mathbb{R}^3$ come volevasi dimostrare. Analogamente si dimostra che $(P_2)^2(\underline{w}) = P_2(\underline{w})$ $\forall\underline{w} \in \mathbb{R}^3$. La dimostrazione del fatto che

$$P_2 = \mathrm{Id} - P_1$$

è chiara: si tratta di dimostrare che $\forall \underline{w} \in \mathbb{R}^3$ $P_2\underline{w} = (\mathrm{Id} - P_1)\underline{w}$. A destra c'è, per definizione[2], il vettore $\mathrm{Id}(\underline{w}) - P_1\underline{w} \equiv \underline{w} - \underline{w}_1$. D'altra parte $P_2(\underline{w}) = \underline{w}_2$; ma allora l'identità che si vuole dimostrare (e cioè $P_2(\underline{w}) = (\mathrm{Id} - P_1)(\underline{w})$) non è altro che l'identità $\underline{w}_2 = \underline{w} - \underline{w}_1$ che è sicuramente vera.
Le altre formule

$$S_1 = \mathrm{Id} - 2P_2\,, \qquad S_2 = 2P_2 - \mathrm{Id}$$

seguono da un identico ragionamento. Consideriamo ad esempio la prima; dobbiamo verificare che $\forall \underline{w} \in \mathbb{R}^3$ si ha

$$S_1(\underline{w}) = (\mathrm{Id} - 2P_2)(\underline{w})$$

e cioè $S_1(\underline{w}) = \underline{w} - 2P_2(\underline{w})$; a sinistra c'è per definizione il vettore $\underline{w}_1 - \underline{w}_2$; a destra c'è il vettore $\underline{w} - 2(\underline{w}_2)$ che è uguale a $(\underline{w}_1 + \underline{w}_2) - 2\underline{w}_2$ che è uguale a $\underline{w}_1 - \underline{w}_2$; riassumendo

$$S_1(\underline{w}) = \underline{w}_1 - \underline{w}_2 = (\mathrm{Id} - 2P_2)(\underline{w})$$

come si voleva.

**Soluzione esercizio 8.** Dobbiamo scrivere la matrice associata nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ alla proiezione $P_2$ sul piano $\pi$ di equazione $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$ parallelamente alla retta $r = \mathbb{R}(1,2,1)$. Fissiamo una base di $\mathbb{R}^3$, e la chiamiamo, $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$, tale che

$$\underline{g}_1, \underline{g}_2 \in \pi\,, \qquad \underline{g}_3 \in r.$$

Dato che $r$ non è contenuta in $\pi$ questo si può sempre fare. Ad esempio

$$\underline{g}_1 = (1,1,0)\,, \quad \underline{g}_2 = (0,1,-1)\,, \quad \underline{g}_3 = (1,2,1).$$

Per definizione stessa di $P_2$ si ha

$$P_2(\underline{g}_1) = \underline{g}_1\,, \quad P_2(\underline{g}_2) = \underline{g}_2\,, \quad P_2(\underline{g}_3) = \underline{0}$$

(perché le decomposizioni di questi 3 vettori secondo la decomposizione $\mathbb{R}^3 = r \oplus \pi$ sono $\underline{g}_1 = \underline{0} + \underline{g}_1$, $\underline{g}_2 = \underline{0} + \underline{g}_2$, $\underline{g}_3 = \underline{g}_3 + \underline{0}$). Scritto in maniera più suggestiva

$$\begin{aligned} P_2(\underline{g}_1) &= 1\,\underline{g}_1 + 0\,\underline{g}_2 + 0\,\underline{g}_3 \\ P_2(\underline{g}_2) &= 0\,\underline{g}_1 + 1\,\underline{g}_2 + 0\,\underline{g}_3 \\ P_2(\underline{g}_3) &= 0\,\underline{g}_1 + 0\,\underline{g}_2 + 0\,\underline{g}_3 \end{aligned}$$

Quindi la matrice associata a $P_2$ **nella base** $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ è

$$B = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right| .$$

Noi però vogliamo la matrice $A$ associata a $P_2$ nella base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$. Siamo quindi nello schema:

$$\begin{array}{lll} A \text{ associata a : } \{\underline{e}_j\} \text{ base di partenza} & & \{\underline{e}_j\} \text{ base di arrivo} \\ B \text{ associata a : } \{\underline{g}_j\} \text{ base di partenza} & & \{\underline{g}_j\} \text{ base di arrivo} \end{array}$$

[2] In generale se $S$ e $T$ sono due endomorfismi allora la loro somma $S+T$ è l'applicazione definita da $(S+T)(\underline{w}) = S\underline{w} + t\underline{w}$. Questa è ancora un'applicazione lineare. Analogamente $\alpha T$, $\alpha \in \mathbb{R}$ è l'applicazione lineare definita da $(\alpha T)(\underline{w}) = \alpha(T\underline{w})$.

Sia $M$ la matrice che ha come $j$-ma colonna le coordinate di $\underline{g}_j$ rispetto alla base canonica. Per quanto visto a lezione

$$B = M^{-1} A M \quad \text{e quindi} \quad A = M B M^{-1} . \tag{3}$$

La matrice $M$ è la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} ;$$

una volta calcolata l'inversa $M^{-1}$ abbiamo tutte le matrici che compaiono in (3); facendo il prodotto otteniamo $A$. Lascio a voi i calcoli.

**Soluzione esercizio 5 del 15/12.** Vi richiamo il testo dell'esercizio:
*Siano $V, W, Z$ spazi vettoriali e $T : V \longrightarrow W$, $S : W \longrightarrow Z$ due applicazioni lineari. Verificare che se $T$ è non-iniettiva allora la composizione $S \circ T$ è non-iniettiva per ogni $S : W \to Z$ (questo è molto facile da verificare). Supponiamo ora che $S$ sia non-iniettiva: è vero che $S \circ T$ è non-iniettiva per ogni $T : V \to W$? La risposta è no. Elaborate una spiegazione e fornite un esplicito controesempio. Cercate di ragionare geometricamente utilizzando il sottospazio nucleo.*
**Soluzione.** Dato che $T$ è non iniettiva, esiste $\underline{v} \neq \underline{0}$ tale che $T(\underline{v}) = \underline{0}$. Ma allora $S(T(\underline{v})) = \underline{0}$, perché $S$, essendo lineare, manda il vettore nullo nel vettore nullo. Quanto scritto afferma che $\exists \underline{v} \neq \underline{0}$ tale che $(S \circ T)(\underline{v}) = \underline{0}$ *per qualsiasi* $S : W \to Z$; ma allora $S \circ T$ è non iniettiva *per ogni* tale $S$ e questo è quanto dovevamo dimostrare.
Passiamo alla seconda parte dell'esercizio. Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare iniettiva. Ad esempio l'applicazione definita da

$$T(1,0) = (1,1,0) , \qquad T(0,1) = (0,0,1).$$

Quest'applicazione ha come immagine il piano $\pi$ generato dai vettori

$$(1,1,0) \quad (0,0,1) .$$

Questo piano ha equazione

$$\det \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ovvero} \quad x_1 - x_2 = 0$$

Il vettore $(1,-1,0)$ non appartiene quindi a questo piano; sia $r = \mathbb{R}(1,-1,0)$, otteniamo la decomposizione $\mathbb{R}^3 = r \oplus \pi$. Sia $S$ la proiezione su $\pi$ parallelamente a $r$ (solitamente denotata con il simbolo $P_2$); abbiamo visto che $S$ è non-iniettiva perché il nucleo di $S$ è dato da $r$. D'altra parte $S \circ T$ **è iniettiva** perché $(S \circ T)\underline{x} = S(T\underline{x}) = T\underline{x}$ e sappiamo dalla iniettività di $T$ che quest'ultimo vettore è uguale al vettore nullo se e solo se $\underline{x}$ è uguale al vettore nullo. (L'ultima uguaglianza segue dalla definizione di $S$ e dal fatto che $T\underline{x} \in \pi$.). Concludendo:
$T$ è iniettiva, $S$ è non-iniettiva, ma $S \circ T$ è iniettiva.
La ragione geometrica di questo fenomeno è la seguente; l'immagine di $T$ ha intersezione banale con il nucleo di $S$. Fate delle figure nel caso trattato!
In generale
*se $T$ è iniettiva, $S$ è non-iniettiva, e $\mathrm{Im}T \cap \mathrm{Ker}S = \underline{0}$ allora $S \circ T$ è iniettiva.*
Infatti

$$(S \circ T)(\underline{v}) = \underline{0} \Leftrightarrow S(T(\underline{v})) = \underline{0} \Leftrightarrow T\underline{v} \in \mathrm{KerS}$$

ma per ipotesi $\mathrm{Im}T \cap \mathrm{Ker}S = \underline{0}$ e quindi ne segue che $T\underline{v} = \underline{0}$ ed essendo $T$ iniettiva per ipotesi, ne segue che $\underline{v} = \underline{0}$. Quindi $\mathrm{Ker}(S \circ T) = \underline{0}$ e $S \circ T$ è iniettiva.