Geometria 1. I^0 Modulo. a.a. 00/01. Gruppo E-N
Esercizi per casa del 15/12/00: traccia delle soluzioni

Esercizio 1. $V = \mathbb{R}^3$ *con base canonica* $\underline{e}_1 = (1,0,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1,0)$, $\underline{e}_3 = (0,0,1)$. *Spiegare perché esiste ed è unica l'applicazione lineare* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tale che*

$$F(1,1,1) = (2,3,2), \quad F(0,1,1) = (1,3,2), \quad F(0,1,-1) = (1,1,-2).$$

Determinare la matrice associata ad F *nella base canonica (quindi base di partenza e base di arrivo uguali alla base canonica).*

Soluzione. L'applicazione F è univocamente determinata perché è lineare e perché i 3 vettori

$$(1,1,1) \quad (0,1,1) \quad (0,1,-1)$$

sono una base per $\mathbb{R}^3$. Per determinare la matrice associata a F nella base canonica dobbiamo calcolare le coordinate di $F(\underline{e}_1)$, $F(\underline{e}_2)$, $F(\underline{e}_3)$; queste saranno, per definizione, le colonne della matrice cercata.

Osservazione. Notiamo una volta per tutte che una tripla $\underline{x}$ di $\mathbb{R}^3$ coincide con le sue coordinate rispetto alla base canonica

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1).$$

Per poter calcolare $F(\underline{e}_1)$, $F(\underline{e}_2)$, $F(\underline{e}_3)$ dobbiamo esprimere i vettori della base canonica in funzione dei vettori

$$(1,1,1) \quad (0,1,1) \quad (0,1,-1)$$

sui quali sappiamo calcolare F. Si ha chiaramente $(1,0,0) = (1,1,1) - (0,1,1)$ e quindi, per linearità,

$$F(1,0,0) = F(1,1,1) - F(0,1,1) = (2,3,2) - (1,3,2) = (1,0,0)\,;$$

questa è la prima colonna della matrice. Analogamente

$$(0,1,0) = (0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}) + (0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$$

e quindi

$$\begin{aligned} F(0,1,0) &= F\left((0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}) + (0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\right) = && (1)\\ \frac{1}{2}F(0,1,1) + \frac{1}{2}F(0,1,-1) &= \frac{1}{2}(1,3,2) + \frac{1}{2}(1,1,-2) = (1,2,0); && (2) \end{aligned}$$

questa è la seconda colonna della matrice. Infine

$$(0,0,1) = (0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}) - (0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$$

e quindi

$$F(0,0,1) = \frac{1}{2}(1,3,2) - \frac{1}{2}(1,1,-2)$$

che è uguale a $(0,1,2)$. In definitiva,

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Esercizio 2 . *Determinare l'espressione in coordinate di un'applicazione lineare* $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *che trasformi il vettore* $(1,1) \in \mathbb{R}^2$ *nel vettore* $(1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ *ed abbia* *nucleo banale (quindi iniettiva). Determinare equazioni parametriche e cartesiane per il sottospazio immagine della vostra F. (La risposta non è, ovviamente, unica). Rifate questo esercizio imponendo sempre che F trasformi $(1,1)$ in $(1,1,1)$ ma richiedendo ora che il nucleo sia non banale. Fate delle figure che illustrino le vostre costruzioni.*

Soluzione. Basta estendere per linearità la corrispondenza che manda $(1,1) \to (1,1,1)$ ed un secondo vettore di $\mathbb{R}^2$, non proporzionale a $(1,1)$, in un vettore di $\mathbb{R}^3$ non-proporzionale a $(1,1,1)$. La ragione per la quale scegliamo un vettore di $\mathbb{R}^2$ non-proporzionale a $(1,1)$ è che dobbiamo dire "dove va" *una base* di $\mathbb{R}^2$ per poter definire un'applicazione lineare; scegliamo ad esempio, oltre al vettore $(1,1)$, il vettore $(1,-1)$. Mandiamo questo vettore in $(1,1,0)$. La ragione per la quale decidiamo di mandarlo in un vettore non-proporzionale a $(1,1,1)$ è la seguente; possiamo a questo punto estendere per linearità la corrispondenza

$$(1,1) \to (1,1,1)\,, \quad (1,-1) \to (1,1,0)\,,$$

ed ottenere la nostra applicazione lineare; per costruzione essa ha per immagine

$$\mathrm{Span}\,((1,1,1),(1,1,0))\,.$$

Quest'applicazione lineare ha necessariamente nucleo banale (ragionate a sul fatto che $\dim \mathrm{Ker} F = 2 - \dim \mathrm{Im}\, F = 2 - 2 = 0$) ed è quindi iniettiva. Se avessimo mandato $(1,-1)$ in un vettore proporzionale a $(1,1,1)$ avremmo ottenuto un'immagine 1-dimensionale e quindi un nucleo di dimensione $2-1=1$.
Per l'espressione in coordinate ragioniamo come segue:

$$\underline{x} = (x_1,x_2) = x_1(1,0) + x_2(0,1) = x_1[\frac{1}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(1,-1)] + x_2[\frac{1}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(1,-1)]$$

e quindi

$$F(x_1,x_2) = \frac{x_1}{2}[F(1,1)+F(1,-1)] + \frac{x_2}{2}[F(1,1)-F(1,-1)] = \tag{3}$$

$$= \frac{x_1}{2}[(1,1,1)+(1,1,0)] + \frac{x_2}{2}[(1,1,1)-(1,1,0)] = \tag{4}$$

$$= (x_1,x_1,\frac{x_1}{2}) + (0,0,\frac{x_2}{2}) \tag{5}$$

In definitiva $F(\underline{x}) = (x_1, x_1, \frac{x_1+x_2}{2})$ o, equivalentemente, $y_1 = x_1$, $y_2 = x_1$, $y_3 = (x_1+x_2)/2$.

Per determinare l'altra applicazione, quella non iniettiva, basterà mandare $(1,-1)$ in $(0,0,0)$ oppure, equivalentemente, in un vettore proporzionale a $(1,1,1)$; in ogni caso l'immagine di questa nuova F è costituita dalla retta $\mathbb{R}(1,1,1)$ e l'applicazione non ha quindi immagine 2-dimensionale. Ne segue che F non è iniettiva perchè il suo nucleo ha dimensione $2-1=1$.
La determinazione dell'espressione di quest'applicazione lineare è del tutto simile a quella fatta per il caso iniettivo.

Esercizio 3. *Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ fissata e coordinate (x_1,x_2,x_3). Sappiamo che $\exists$ unica l'applicazione lineare $P : V \longrightarrow V$ tale che*

$$P\underline{e}_1 = 2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3\,, \qquad P\underline{e}_2 = \underline{g}_2 + \underline{g}_3\,, \qquad P\underline{e}_3 = \underline{g}_1 + \underline{g}_2 + \underline{g}_3\,, \tag{6}$$

con $\{\underline{g}_1 = (2,0,1)\,, \underline{g}_2 = (1,3,0)\,, \underline{g}_3 = (0,1,2)\}$. Determinare la matrice associata a P nella base canonica (base di partenza = base di arrivo = base canonica). Si verifichi ora che $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Determinare la matrice associata *a P con base di partenza la base canonica e base di arrivo la base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$. Determinare l'immagine del vettore $\underline{u} = 2\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2 + 2\underline{e}_3$ tramite P.*

Soluzione. Questo esercizio è più semplice dei precedenti. La matrice associata a P nella base canonica (base di partenza = base di arrivo = base canonica) si ottiene scrivendo le espressioni a destra in (6) in termini della base canonica; ma ciò è immediato

$$P\underline{e}_1 = 2(2,0,1) - 2(0,1,2) = (4,-2,-2)\,.$$

Questa è la prima colonna. Analogamente

$$P\underline{e}_2 = (1,3,0) + (0,1,2) = (1,4,2)\,, \quad P\underline{e}_3 = (2,0,1) + (1,3,0) = (4,3,1)$$

Quindi la matrice cercata è

$$\left|\begin{array}{ccc} 4 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{array}\right|$$

L'altra matrice, quella con base di partenza = base canonica e base di arrivo = base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ è praticamente data nel testo dell'esercizio. Infatti per definizione questa matrice ha per colonne le coordinate dei vettori $P\underline{e}_j$ *nella base* $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$. Ma questa è proprio l'informazione che viene fornita dal testo dell'esercizio. Quindi la matrice in questo caso è

$$\left|\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

Per determinare l'immagine del vettore $\underline{u} = 2\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2 + 2\underline{e}_3 = (2,3,2)$ tramite P basterà calcolare il prodotto righe per colonne

$$\left|\begin{array}{ccc} 4 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 2 \end{array}\right|\,.$$