Geometria 1. I^0 Modulo. a.a. 00/01. Gruppo E-N
Esercizi per il giorno 7/12/00: Traccia delle soluzioni.

Esercizio 1. Basta considerare il fascio di piani per la retta data ed imporre il passaggio per il punto $(0, 2, 0)$. Il fascio di piani ha equazioni

$$\lambda(x - z - 3) + \mu(y + 2z - 1) = 0$$

al variare di (λ, μ) in $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$. Imponendo il passaggio per $(0, 2, 0)$ si ottiene $-3\lambda + \mu = 0$ che ha soluzione $\lambda = 1$, $\mu = 3$ a meno di un comune fattore di proporzionalità non nullo. Il piano cercato ha quindi equazione $x + 3y + 5z - 6 = 0$.

Esercizio 1.5. Notiamo che il punto non appartiene alla retta; il problema è quindi ben posto. Si può procedere in (almeno) due modi: si determinano 2 punti distinti sulla retta e si utilizza l'equazione del piano per 3 punti non allineati. Si può altrimenti scrivere l'equazione cartesiana della retta e procedere come nell'Es. precedente.

Esercizio 2. La retta cercata è l'intersezione del piano π e del piano per Q e s. Quest'ultimo piano si ottiene come nell'Es. 1; mettendo poi a sistema con l'equazione cartesiana di π si ottengono le equazioni della retta cercata.

Esercizio 3. Basta utilizzare la condizione di complanarità; per la proposizione r e ρ sono complanari sse

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & -l & -p \\ 0 & 1 & -m & -q \\ 1 & 0 & -l' & -p' \\ 0 & 1 & -m' & -q' \end{vmatrix} = 0.$$

Usando Gauss-Jordan segue la tesi.

Esercizio 4. r ha parametri direttori $(2, 1, 1)$; ne segue che $\widetilde{r}$ ha equazioni cartesiane (ridotte)

$$\begin{cases} x = 2z + p \\ y = z + q \end{cases}$$

Per determinare p e q imponiamo la complanarità con le rette s e t di equazioni rispettivamente

$$\begin{cases} x + 2z - 1 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad ;$$

utilizzando l'esercizio precedente si ottengono due equazioni lineari in p e q; risolvendo il relativo sistema si ottengono i due valori p e q cercati.

Esercizio 5. La retta si ottiene come intersezione di due piani σ e σ': σ è il piano per s e $(4, 1, 0)$; σ' è il piano per t e per $(4, 1, 0)$. Questi due piani si ottengono come nell'Es.1 ; mettendo a sistema le due equazioni ottenute si ottengono le equazioni cartesiane della retta cercata.

Esercizio 6. I vettori direttori delle 2 rette sono 2 vettori di giacitura per il piano; abbiamo quindi un punto e due vettori di giacitura. L'equazione del piano è ora chiara da quanto visto a lezione (si veda anche pag. 2 dell' Introduzione/Riassunto).

Esercizio 7. Le due rette sono complanari (applicare il criterio) e non parallele; sono quindi incidenti. Un piano che le contiene è $2x - 3z + 8 = 0$; questo piano è ottenuto, fissando un punto Q su una retta, ad esempio la seconda, e facendo passare per questo punto il generico piano per la prima retta. In formule: il generico piano per le prima retta è $\lambda(x+1)+\mu(z-2)=0$. Un punto sulla seconda è : $(-5/2,1,1)$; quindi $\lambda=2$ $\mu=-3$ e si ha l'equazione $2x-3z+8=0$.

Esercizio 8. Procedere come nell'Es. 5.