Geometria 1. Gruppo A-K. Anno Accademico 1999-2000.

Soluzione degli esercizi assegnati il 12/10/99.

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}^3$. Sono dati i sottospazi

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\} \; ; \quad U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\} \, .$$

Determinare $U \cap W$, $U + W$. Determinare $\underline{v} \in V$, $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2 \in U$, $\underline{w}_1$, $\underline{w}_2 \in W$ tali che

$$\underline{v} = \underline{u}_1 + \underline{w}_1 \; , \quad \underline{v} = \underline{u}_2 + \underline{w}_2 \quad \text{e} \quad \underline{u}_1 \neq \underline{u}_2 \text{ oppure } \underline{w}_1 \neq \underline{w}_2$$

Soluzione. In classe abbiamo verificato che $U \cap W = \mathbb{R}(1, -2, 3)$ risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Abbiamo anche verificato che $U + W = \mathbb{R}^3$. Infatti $U + W$ è uguale a tutte le somme del tipo $\underline{u} + \underline{w}$ con $\underline{u} \in U$ e $\underline{w} \in W$. Dato che $U =< (1, 0, 1) \, , (0, -1, 1) >$ e $W =< (2, -1, 0) \, , (1, 0, -1) >$ ne segue che $U + W$ è uguale a tutte le combinazioni lineari dei vettori $(1, 0, 1) \, , (0, -1, 1) \, , (2, -1, 0) \, , (1, 0, -1)$. In formule

$$U + W =< (1, 0, 1) \, , (0, -1, 1) \, , (2, -1, 0) \, , (1, 0, -1) > \; .$$

Dato che siamo in $\mathbb{R}^3$ il massimo numero di vettori linearmente indipendenti fra questi 4 vettori è 3. Inoltre ci sono effettivamente tre vettori linearmente indipendenti perché $(1, 0, 1) \notin W$ e quindi $(1, 0, 1)$ *non* è combinazione lineare di $(2, -1, 0) \, , (1, 0, -1)$ (e quindi $(1, 0, 1) \, , (2, -1, 0) \, , (1, 0, -1)$ sono linearmente indipendenti). Questo vuol dire che $(1, 0, 1) \, , (2, -1, 0) \, , (1, 0, -1)$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$ ed è allora chiaro che
$U + W =< (1, 0, 1) \, , (0, -1, 1) \, , (2, -1, 0) \, , (1, 0, -1) >=< (1, 0, 1) \, , (2, -1, 0) \, , (1, 0, -1) >= \mathbb{R}^3$. Tutto questo è stato spiegato a lezione.

Passiamo all'ultima parte dell'esercizio. Sappiamo che $U + V = \mathbb{R}^3$. Se fosse $U \cap W = \{\underline{0}\}$ allora (vedi la lezione di oggi oppure la Proposizione qui sotto enunciata) l'esercizio non avrebbe soluzione. Si ha invece $U \cap W = \mathbb{R}(1, -2, 3)$; intuitivamente dobbiamo allora inventarci qualcosa con questo vettore $(1, -2, 3) \in U \cap W$. Consideriamo

$$\underline{v} = ((2, -1, 0) + (1, -2, 3)) + (1, 0, 1) \quad \text{e cioè} \quad \underline{v} = (4, -3, 4).$$

Dato che $(1, 0, 1) \in U$, $(2, -1, 0) \in W$ e $(1, -2, 3) \in W \cap U \subset W$ ne segue che $\underline{v}$ è espresso come somma di un vettore in W, il vettore $\underline{w}_1 = (2, -1, 0) + (1, -2, 3) = (3, -3, 3)$, e di un vettore in U, il vettore $\underline{u}_1 = (1, 0, 1)$. D'altra parte la somma è associativa e quindi

$$\underline{v} = (2, -1, 0) + ((1, -2, 3) + (1, 0, 1))$$

Sia $\underline{w}_2 = (2, -1, 0)$ e $\underline{u}_2 = (1, -2, 3)) + (1, 0, 1)$. Allora è chiaro che $\underline{w}_2 = (2, -1, 0) \in W$ mentre $\underline{u}_2 = (1, -2, 3)) + (1, 0, 1) = (2, -2, 4) \in U$ (dal momento che $(1, -2, 3) \in W \cap U$ e $(1, 0, 1) \in U$). In definita con la nostra scelta di vettori $\underline{v}, \underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{w}_1, \underline{w}_2$ si ha che

$$\underline{v} = \underline{w}_1 + \underline{u}_1 \; ; \; \underline{v} = \underline{w}_2 + \underline{u}_2 \; ; \; \underline{w}_i \in W \; , \underline{u}_i \in U, \; i = 1, 2, \; \underline{w}_1 \neq \underline{w}_2 \; \text{ e } \; \underline{u}_1 \neq \underline{u}_2$$

e la soluzione è completa.

Supponiamo, in generale, che $V = U + W$. Se $U \cap W = \{\underline{0}\}$, e cioè $V = U \oplus W$, allora ogni vettore $\underline{v} \in V$ si esprime *in maniera unica* come somma $\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$ per opportuni $\underline{u} \in U$ e $\underline{v} \in V$. Questo è stato dimostrato a lezione. Di fatto è anche vero il viceversa. Esprimiamo tutto ciò nella

Proposizione. Sia $V = U + W$. Allora $V = U \oplus W$ se e soltanto se ogni vettore di V si esprime *in maniera unica* come somma di un vettore in U e di un vettore in W.
Dim. In una direzione l'abbiamo dimostrato. Dimostriamo il viceversa e cioè che "se ogni vettore di V si esprime *in maniera unica* come somma di un vettore in U e di un vettore in W" *allora* $U \cap W = \{\underline{0}\}$. Per assurdo esiste $\underline{f} \neq \underline{0} \in U \cap W$. Possiamo sicuramente scrivere

$$\underline{f} = \underline{u}_1 + \underline{w}_1 \text{ con } \underline{u}_1 = \underline{f}\,,\ \underline{w}_1 = \underline{0}$$

Il vettore $\underline{u}_1 \in U$ (perché appartiene a $U \cap W$) e certamente $\underline{w}_1 \in W$. D'altra parte potremo anche scrivere

$$\underline{f} = \underline{u}_2 + \underline{w}_2 \text{ con } \underline{u}_2 = \underline{0}\,,\ \underline{w}_2 = \underline{f}\,.$$

Si ha $\underline{u}_2 \in U$, $\underline{w}_2 \in U \cap W \subset W$. Dato che siamo sotto l'ipotesi che $\underline{f} \neq \underline{0}$ ne segue che $\underline{u}_1 \neq \underline{u}_2$, $\underline{w}_1 \neq \underline{w}_2$. Ma questo è assurdo perché avevamo supposto che "ogni vettore di V si esprime *in maniera unica* come somma di un vettore in U e di un vettore in W". QED

Esercizio 2. Sia $V = M_{3\times3}(\mathbb{R})$. Sia $S_{3\times3}(\mathbb{R}) = \{A \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) | A = A^t\}$ e sia $A_{3\times3}(\mathbb{R}) = \{A \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) | A = -A^t\}$. Dimostrare che $M_{3\times3}(\mathbb{R}) = S_{3\times3}(\mathbb{R}) \oplus A_{3\times3}(\mathbb{R})$.
Soluzione. Vediamo innanzitutto che $S_{3\times3}(\mathbb{R}) + A_{3\times3}(\mathbb{R}) = S_{3\times3}(\mathbb{R}) \oplus A_{3\times3}(\mathbb{R})$. Per definizione di somma diretta questo vuol dire semplicemente che $S_{3\times3}(\mathbb{R}) \cap A_{3\times3}(\mathbb{R}) = \{\underline{0}\}$. Ma se $B \in S_{3\times3}(\mathbb{R}) \cap A_{3\times3}(\mathbb{R})$ ne segue che $B = B^t$ *e* $-B = B^t$; ma allora $B = -B$ e quindi B è la matrice nulla: $B = \underline{0}$. Avete visto l' 8/10 che $\dim S_{3\times3}(\mathbb{R}) = 6$ e $\dim A_{3\times3}(\mathbb{R}) = 3$. Più in generale avete visto che

$$\dim S_{n\times n}(\mathbb{R}) = n + \frac{n(n-1)}{2} \qquad \dim A_{n\times n}(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}\,.$$

Ma allora da quanto sopra e dalla formula di Grassmann segue che $\dim(S_{3\times3}(\mathbb{R}) \oplus A_{3\times3}(\mathbb{R})) = 9 = \dim M_{3\times3}(\mathbb{R})$. Questo implica che $(S_{3\times3}(\mathbb{R}) \oplus A_{3\times3}(\mathbb{R})) = M_{3\times3}(\mathbb{R})$ e la soluzione è completa. Lo stesso identico ragionamento (insieme alle citate formule per le dimensioni di $S_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $A_{n\times n}(\mathbb{R})$) dimostra che $M_{n\times n}(\mathbb{R}) = S_{n\times n}(\mathbb{R}) \oplus A_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Esercizio 3. Risolvere gli esecizi 4, 5, 6 pag. 65 del Sernesi.
Soluzione. Il 4 ed il 6 sono risolti nel libro di testo (pag. 447). Risolviamo il 5. È chiaro che U ha dimensione uguale a 2 (i due vettori che generano U sono non-proporzionali e quindi linearmente indipendenti). Analogamente $\dim W = 2$. Notiamo anche che $U = \{(k + h\sqrt{5}, 0, -(h + k\sqrt{5}), 0)\ ,\ h, k \in \mathbb{R}\}$ e che $W = \{(0, -2\alpha + \beta, 0, 3\alpha + \beta)\ ,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Ma allora tutti i vettori che sono in U hanno sempre la seconda e quarta coordinata uguali a zero. Mentre tutti i vettori che sono in W hanno sempre la prima e terza coordinata uguali a zero. Ciò implica che i vettori che sono in U *e* in W hanno la seconda, quarta *e* prima, terza coordinata uguali a zero. In altre parole hanno tutte le coordinate uguali a zero. Ne segue che $U \cap W = \{\underline{0}\}$. Dalla formula di Grassmann segue che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ (pensateci).