Algebra Lineare. a.a. 2004-05

Soluzioni dlla prova scritta del 14 Gennaio 2005

Esercizio 1. Verificare se la matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -3 \\ -2 & 4 & -2 \end{vmatrix};$$

è diagonalizzabile

Soluzione. Indicata con A la matrice assegnata, calcoliamone il polinomio caratteristico. Si ha

$$\begin{aligned} p_A(t) &= \det \begin{vmatrix} -t & 2 & -2 \\ -2 & 5-t & -3 \\ -2 & 4 & -2-t \end{vmatrix} \\ &= -t \det \begin{vmatrix} 5-t & -3 \\ 4 & -2-t \end{vmatrix} - 2\det \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -2-t \end{vmatrix} - 2\det \begin{vmatrix} -2 & 5-t \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -t(t^2-3t+2) - 2(2t-2) - 2(2-2t) \\ &= -t(t-1)(t-2). \end{aligned}$$

Dunque A è una matrice 3×3 con 3 autovalori distinti; ne segue che A è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l' endomorfismo

$$F(x, y) = (x + y, 2x - y)$$

Determinare la matrice A associata a F rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \{\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}\}.$$

Sia $\mathcal{C} = \{\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}\}$, determinare la matrice P del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ e la matrice B associata a F rispetto alla base $\mathcal{C}$. Motivare la relazione tra $\operatorname{tr} A$ e $\operatorname{tr} B$.

Soluzione. La matrice associata ad F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ è

$$M^{\text{can.}}_{\text{can.}}(F) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Dunque la matrice A richiesta è

$$\begin{aligned} A &= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F) = M^{\mathcal{B}}_{\text{can.}}(\text{Id}) \cdot M^{\text{can.}}_{\text{can.}}(F) \cdot M^{\text{can.}}_{\mathcal{B}}(\text{Id}) \\ &= (M^{\text{can.}}_{\mathcal{B}}(\text{Id}))^{-1} \cdot M^{\text{can.}}_{\text{can.}}(F) \cdot M^{\text{can.}}_{\mathcal{B}}(\text{Id}) \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 3/2 & -3/2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Ed infatti

$$F(\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}) = \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix};$$

$$F(\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}) = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} - \frac{3}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

La matrice P del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ è

$$\begin{aligned} P &= M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\text{Id}) = M^{\mathcal{C}}_{\text{can.}}(\text{Id}) \cdot M^{\text{can.}}_{\mathcal{B}}(\text{Id}) \\ &= (M^{\text{can.}}_{\mathcal{C}}(\text{Id}))^{-1} \cdot M^{\text{can.}}_{\mathcal{B}}(\text{Id}) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Ed infatti

$$\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

La matrice B associata ad F rispetto alla base $\mathcal{C}$ è

$$\begin{aligned} B &= M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(F) = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\text{Id}) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\text{Id}) \\ &= M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\text{Id}) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F) \cdot (M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\text{Id}))^{-1} \\ &= P \cdot A \cdot P^{-1} \\ &= \begin{vmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 3/2 & -3/2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix}^{-1} \\ &= \begin{vmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 3/2 & -3/2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3/2 & -3/2 \\ -1/2 & -3/2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Ed infatti

$$F(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}) = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix};$$

$$F\left(\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 0 \\ -3 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} - \frac{3}{2} \cdot \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Osserviamo che $\operatorname{tr} A = 0 = \operatorname{tr} B$. Questo non è un caso: infatti $B = P \cdot A \cdot P^{-1}$ e matrici coniugate hanno la stessa traccia.

Esercizio 3. Determinare l' equazione cartesiana del piano π contenente la retta r di equazioni

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

e passante per il punto $P = (1, 0, 3)$.

Calcolare la distanza di π dal punto $Q = (2, -1, 2)$

Soluzione. Cominciamo col determinare equazioni cartesiane per la retta r. Dalle equazioni di r si ha che $(x, y, z) \in r$ se e solo se $(x - 1, y, z - 2)$ è linearmente dipendente dal vettore $(1, -1, 2)$, ovvero se e solo se

$$\operatorname{rg}\begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ -1 & y \\ 2 & z-2 \end{vmatrix} = 1$$

Mediante eliminazione gaussiana otteniamo

$$\begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ -1 & y \\ 2 & z-2 \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & x+y-1 \\ 0 & z-2x \end{vmatrix}$$

Dunque equazioni cartesiane per r sono

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z - 2x = 0 \end{cases}$$

Il fascio dei piani contenenti r è

$$\pi_{\alpha,\beta} : \alpha(x + y - 1) + \beta(z - 2x) = 0.$$

Imponendo il passaggio per $P = (1, 0, 3)$ otteniamo $\beta = 0$ e dunque $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ a meno di un fattore scalare. Ne segue che un'equazione cartesiana per π è

$$\pi : x + y - 1 = 0$$

Per calcolare la distanza $d(Q, \pi)$, basta osservare che le coordinate di Q soddisfano l'equazione di π, ovvero Q appartiene al piano π e dunque $d(Q, \pi) = 0$. Se non ci si accorge che $Q \in \pi$, si può comunque calcolare la distanza $d(Q, \pi)$ seguendo il solito procedimento: osserviamo che il punto $R = (-1, 0, 0)$ appartiene al piano π. Dunque il piano traslato $\pi_0 = \pi - R$ è la direzione di π. Poichè le distanze sono invarianti per traslazione, $d(Q, \pi) = d(Q - R, \pi_0)$ e quest'ultima distanza si calcola immediatamente proiettando il vettore $Q - R$ sulla direzione normale al piano π_0. L'equazione cartesiana di π_0 è $x + y = 0$, dunque la direzione ortogonale a π_0 è individuata dal vettore $\underline{v} = (1, 1, 0)$. Otteniamo cosı̀

$$d(Q, \pi) = |\, \langle Q - R, \frac{\underline{v}}{||\underline{v}||} \rangle \,| = \frac{1}{\sqrt{2}} |\, \langle (1, -1, 2), (1, 1, 0) \rangle \,| = 0.$$

Esercizio 4. Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ applicando il procedimento di Gram-Schmidt ai seguenti vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{vmatrix}$$

Soluzione. Con la prima fase del procedimento di Gram-Schmidt determiniamo una base ortogonale $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$. Si ha

$$\underline{w}_1 = \underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix};$$

$$\underline{w}_2 = \underline{v}_2 - \frac{\langle \underline{v}_2, \underline{w}_1 \rangle}{\langle \underline{w}_1, \underline{w}_1 \rangle}\underline{w}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix};$$

$$\underline{w}_3 = \underline{v}_3 - \frac{\langle \underline{v}_3, \underline{w}_1 \rangle}{\langle \underline{w}_1, \underline{w}_1 \rangle}\underline{w}_1 - \frac{\langle \underline{v}_3, \underline{w}_2 \rangle}{\langle \underline{w}_2, \underline{w}_2 \rangle}\underline{w}_2 = \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{vmatrix} - \frac{9}{5}\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} - \frac{4}{3}\begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4/15 \\ -2/3 \\ 8/15 \end{vmatrix}$$

Normalizzando $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$ otteniamo la base ortonormale $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$:

$$\underline{e}_1 = \frac{\underline{w}_1}{||\underline{w}_1||} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{e}_2 = \frac{\underline{w}_2}{||\underline{w}_2||} = \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$\underline{e}_3 = \frac{\underline{w}_3}{||\underline{w}_3||} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \cdot \begin{vmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \end{vmatrix}$$

Esercizio 5. Sia $M_{22}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici due per due a coefficienti reali. Sia T l' applicazione lineare che porta una matrice A nella sua trasposta. Calcolare autovalori ed autovettori di T.

Soluzione. Se scriviamo $A = \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}$, allora

$$T(\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}) = \begin{vmatrix} x & z \\ y & w \end{vmatrix}$$

Dunque se identifichiamo $M_{22}(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^4$ mediante l'isomorfismo lineare dato da

$$\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} \longleftrightarrow \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{vmatrix}$$

possimao leggere T come l'applicazione lineare da $\mathbb{R}^4$ in sè data da

$$T(\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{vmatrix}) = \begin{vmatrix} x \\ z \\ y \\ w \end{vmatrix}$$

Quest'applicazione è rappresentata (rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$) dalla matrice 4×4

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di M è

$$p_M(t) = \det \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (t-1)^3(t+1)$$

Dunque gli autovalori di T sono $t = 1$ con molteplicità algebrica 3, e $t = -1$ con molteplictà algebrica 1. Determiniamo gli autospazi. L'1-autospazio di T è $\ker(T - \mathrm{Id})$ ed è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

ovvero da

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix}$$

L'1-autospazio ha pertanto dimensione 3, ed una base è data da

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

In termini di matrici, stiamo dicendo che lo spazio delle matrici 2×2 che coincidono con la loro trasposta (matrici simmetriche) è lo spazio di dimensione 3 delle matrici della forma

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

e che una sua base è

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Veniamo ora al (-1)-autospazio di T. Si tratta del sottospazio $\ker(T + \mathrm{Id})$ dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

ovvero da

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

Il (-1)-autospazio ha pertanto dimensione 1, ed una base è data da

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

In termini di matrici, stiamo dicendo che lo spazio delle matrici 2×2 che coincidono con l'opposto della loro trasposta (matrici antisimmetriche) è lo spazio di dimensione 1 delle matrici della forma

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{vmatrix}$$

e che una sua base è

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Osserviamo che il polinomio caratteristico di T ha tutte radici reali e che per ogni autovalore la molteplicità geometrica coincide con la molteplicità algebrica: l'applicazione lineare $T\colon M_{22}(\mathbb{R}) \to M_{22}(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile.