Geometria 1. I^0 Modulo. a.a. 00/01. Gruppo E-N (Paolo Piazza)
Soluzioni esonero del 29/1/01

Esercizio 1. *Sia $RC(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ un riferimento cartesiano nello spazio affine con coordinate associate (x, y, z). Si verifichi che esiste un solo piano contenente i tre punti*

$$P_1(1,2,0), \quad P_2(1,1,1), \quad P_3(2,-1,-3).$$

e se ne dia un'equazione cartesiana.

Soluzione. Per tre punti non-allineati passa uno ed un solo piano. Per verificare che i tre punti sono non-allineati basta scrivere le equazioni della retta per P_1 e P_2 e verificare che P_3 non soddisfa queste equazioni. Equivalentemente, basta calcolare i vettori direttori delle rette $P_1\,P_2$ e $P_1\,P_3$ e verificare che sono non-proporzionali. Seguiamo, ad esempio, il primo metodo. Le equazioni parametriche della retta $P_1\,P_2$ sono

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$$

e vediamo subito che P_3 non può appartenere a questa retta dato che la sua prima coordinata è 2. Ne segue che i tre punti sono non-allineati.
Per scrivere l'equazione del piano basta utilizzare la formula (4.14) pag 128 del libro. Si trova l'equazione:

$$6x + y + z - 8 = 0\,.$$

Esercizio 2. *Sia $RO(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo con coordinate associate (x, y, z). Si dia un'equazione cartesiana del piano che contiene il punto $P(1,2,3)$ ed è perpendicolare alla retta r definita dalle equazioni cartesiane*

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x + y + 3z + 1 = 0. \end{cases}$$

Soluzione. Sia $ax + by + cz + d = 0$ l'equazione del piano cercato. Sappiamo che i coefficienti (a, b, c) sono proporzionali ai parametri direttori della retta ortogonale, che è data nel testo dell'esercizio. I parametri direttori di r sono $(4, -5, -1)$ e quindi il nostro piano va cercato fra i piani del fascio improprio:

$$4x - 5y - z + d = 0$$

Imponendo il passaggio per il punto $P(1,2,3)$ si trova $d = 9$. L'equazione cercata è quindi

$$4x - 5y - z + 9 = 0\,.$$

Esercizio 3. *Sia $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ una base ortonormale in $\mathcal{V}_O$. Si applichi il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alla base $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$, dove*

$$\underline{u}_1 = \underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k}, \quad \underline{u}_2 = 3\underline{i} + 3\underline{j}, \quad \underline{u}_3 = 2\underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k}.$$

Soluzione. Denotiamo con $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$ la base *ortogonale* ottenuta tramite il procedimento di Gram-Schmidt. Utilizzando le formule pag 173 (ma attenzione alla notazione diversa) si trova

$$\underline{w}_1 = (1,2,2)\,, \quad \underline{w}_2 = (2,1,-2)\,, \quad \underline{w}_3 = (2,-2,1)$$

Non era richiesta la normalizzazione, che però è chiara; basta dividere ogni vettore per la sua lunghezza; si trova così la seguente base ortonormale

$$\underline{h}_1 = (2/3,-2/3,1/3)\,, \quad \underline{h}_2 = (2/3,1/3,-2/3)\,, \quad \underline{h}_3 = (2/3,-2/3.1/3)\,.$$

Esercizio 4. *Due delle matrici*

$$A_1 = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$
$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$
$$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$A_4 = \begin{vmatrix} 5/2 & 1/8 \\ 2 & 5/2 \end{vmatrix}$$
$$A_5 = \begin{vmatrix} 3/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{vmatrix}$$

sono coniugate: dire quali e giustificare la risposta.

Soluzione. Due matrici coniugate hanno lo stesso polinomio caratteristico; ciò implica, ovviamente, che se due matrici hanno polinomi caratteristici diversi, allora non sono coniugate. Ne segue, calcolando tali polinomi caratteristici, che le uniche matrici che possono essere coniugate sono A_2 e A_4. Si ha $P_{A_2}(\lambda) = P_{A_4}(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$ che ha radici *distinte* $\lambda_1 = 2\,, \lambda_2 = 3$. Quindi A_2 è coniugata alla matrice diagonale Δ con

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}\,;$$

A_4 è anche coniugata alla matrice Δ e quindi A_2 è coniugata a A_4 come volevasi dimostrare.

Esercizio 5. *Sia* $V = \mathbb{R}^3$ *e sia* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'operatore lineare definito da*

$$F(1,1,0) = (-1,3,0)\,, \quad F(0,1,0) = (0,1,0)\,, \quad F(0,1,1) = (2,-1,1)$$

5.1. Spiegare perché F *è ben definito da queste relazioni.*

5.2. Verificare che la matrice associata ad F *nella base canonica di* $\mathbb{R}^3$ *è*

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\,.$$

5.3. Stabilire se F *è diagonalizzabile ed in caso affermativo trovare una base di autovettori e la matrice associata ad* F *in questa base.*

5.4. Studiare l'iniettività e la suriettività di F*.*

Soluzione.
5.1 F è ben definito perché è lineare e sono assegnati i suoi valori su una base dello spazio vettoriale sul quale è definito.

5.2 Sia $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ la base canonica. Basta verificare che la matrice A ha come j-ma colonna le coordinate, nella base canonica, di $F(\underline{e}_j)$. Utilizzando la linearità si ha $F(1,0,0) = F((1,1,0) - (0,1,0)) = F(1,1,0) - F(0,1,0) = (-1,3,0) - (0,1,0) = (-1,2,0)$
che è proprio la prima colonna di A. Analogamente si procede per le altre colonne.
5.3 Il polinomio caratteristico di F si può calcolare utilizzando la matrice A: otteniamo $P_T(\lambda) = P_A(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda)$. Ne segue che F ha autovalori 1 con molteplicità algebrica 2 e -1 con molteplicità algebrica 1. L'autospazio V_{-1} ha automaticamente dimensione 1; l'autospazio $V_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (A - I_3)\underline{x} = \underline{0}\}$ ha dimensione $3 - 1 = 2$, come subito si verifica osservando che

$$A - I_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

che ha rango 1. Per il Teorema fondamentale segue che F è diagonalizzabile (le radici del polinomio caratteristico sono reali e la molteplicità algebrica di ciascun autovalore è uguale alla molteplicità geometrica). Una base di autovettori si trova determinando due vettori linearmente indipendenti in V_1 ed un generatore della retta V_{-1}. Dal fatto che $V_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (A - I_3)\underline{x} = \underline{0}\}$ segue che

$$V_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_3 = 0\}$$

ed una base di V_1 è allora

$$(1,0,1), \quad (0,1,0).$$

Analogamente V_{-1} ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

e queste equazioni rappresentano la retta $\mathbb{R}(1,-1,0)$. In definitiva

$$(1,0,1), \quad (0,1,0), \quad (1,-1,0)$$

è una base di autovettori. La matrice associata ad F in questa base è

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

5.4 F è iniettiva e suriettiva dato che $\det \Delta = -1 \neq 0$.