Algebra Lineare. a.a. 2004-05
Prova scritta del 15 Novembre 2004

Esercizio 1. Siano $z = a + ib$ e $z' = a' + ib'$ due numeri complessi, con $z' \neq 0$. Verificare che

$$\frac{z}{z'} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow ab' - ba' = 0.$$

Soluzione. Si ha $z/z' \in \mathbb{R}$ se e solo se $\mathrm{Im}(z/z') = 0$. Calcoliamo

$$\frac{z}{z'} = \frac{z\overline{z'}}{|z'|^2} = \frac{(a+ib)(a'-ib')}{(a')^2+(b')^2} = \frac{aa'-bb'}{(a')^2+(b')^2} + i\frac{ba'-ab'}{(a')^2+(b')^2}$$

Ne segue

$$\frac{z}{z'} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{ba'-ab'}{(a')^2+(b')^2} = 0 \Leftrightarrow ab' - ba' = 0.$$

Esercizio 2. Calcolare le radici quarte di -1.

Soluzione. Il numero complesso -1 ha coordiante polari $(\rho, \theta) = (1, \pi)$. Ne segue che le sue radici quarte sono i numeri complessi aventi coordinate polari $(1, \pi/4 + k\pi/2)$, vale a dire

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
\zeta_2 &= \cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
\zeta_3 &= \cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
\zeta_4 &= \cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Esercizio 3. Stabilire se l'insieme $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^6 \mid x_1x_2 = 0\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^6$.

Soluzione. L'insieme W non è un sotospazio di $\mathbb{R}^6$. Un modo di dimostrarlo è osservare che i vettori $\underline{v} = (1,0,0,0,0,0)$ e $\underline{w} = (0,1,0,0,0,0)$ appartengono all'insieme W, ma la loro somma è il vettore $\underline{v} + \underline{w} = (1,1,0,0,0,0)$, che non appartiene a W.

Esercizio 4. Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4, \underline{v}_5$ i vettori di $\mathbb{R}^5$ dati da

$$\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_4 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_5 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Stabilire se esiste un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$F(\underline{v}_1) =, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}, \ F(\underline{v}_2) =, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \ F(\underline{v}_3) =, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \ F(\underline{v}_4) =, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \ F(\underline{v}_5) =, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

e in caso affermativo:
(i) calcolare l'immagine tramite F del vettore $(3,2,1,0,0)$.
(ii) stabilire se F è iniettiva.

Soluzione. E' immediato osservare che i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4, \underline{v}_5$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^5$. Infatti la matrice che ha per colonne questi vettori è una matrice quadrata triangolare superiore con tutti i pivot diversi da zero, e dunque è non singolare. Ne segue che esiste ed è unica l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ con le proprietà richieste. Per determinare l'immagine del vettore $(3,2,1,0,0)$ mediante l'applicazione F, calcoliamo le coordinate del vettore $(3,2,1,0,0)$ rispetto alla base $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4, \underline{v}_5$ Cerchiamo cioè i numeri reali x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 tali che $x_1\underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2 + x_3\underline{v}_3 + x_4\underline{v}_4 + x_5\underline{v}_5 = (3,2,1,0,0)$, ovvero cerchiamo le soluzioni del sistema lineare la cui matrice è

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

Applicando l'algoritmo di eliminazione di Gauss, troviamo

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

$$\mapsto \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

ovvero $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1,1,1,0,0)$. In altre parole $(3,2,1,0,0) = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3$. A questo punto, per calcolare $F(3,2,1,0,0)$ basta utilizzare la linearità di F:

$$\begin{aligned} F(3,2,1,0,0) &= F(\underline{v}_1 + \underline{v}_1 + \underline{v}_3) = F(\underline{v}_1) + F(\underline{v}_2) + F(\underline{v}_3) \\ &= \left|\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{array}\right| \end{aligned}$$

L'applicazione F non può essere iniettiva perché non possono esserci applicazioni iniettive da uno spazio vettoriale di dimensione maggiore ad uno di dimensione minore.

Esercizio 5. Sia $M_{22}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici due per due a coefficienti reali. Determinare un'applicazione iniettiva $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_{22}(\mathbb{R})$ la cui immagine contenga i vettori

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right|$$

Soluzione. E' sufficiente determinare una terza matrice che sia linearmente indipendente dalle due assegnate. Ad esempio possiamo prendere la matrice $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, ma ci sono infinite altre scelte possibili. Definiamo T assegnando i suoi valori sulla base canonica di $\mathbb{R}^3$:

$$T(1,0,0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \qquad T(0,1,0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \qquad T(0,0,1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

L'immagine del generico vettore (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ mediante T è

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= x\,T(1,0,0) + y\,T(0,1,0) + z\,T(0,0,1) \\ &= x \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x+z & y \\ x & y \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Esercizio 6. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e siano U e W i sottospazi di V definiti da

$$U = \operatorname{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ -3 \end{vmatrix} \right), \quad W = \operatorname{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 5 \end{vmatrix} \right)$$

Determinare la dimensione di U e quella di W. Determinare una base per $U + W$. Determinare la dimensione di $U \cap W$. Stabilire se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Soluzione. Per determinare la dimensione di U scriviamo i vettori che lo generano come righe di una matrice ed utilizziamo l'algoritmo di eliminazione di Gauss:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & -3 \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Dunque $\dim U = 2$ ed una base di U è data dai due vettori $(1, 1, 1, 1)$ e $(0, 1, 0, 1)$. Procedendo in modo analogo per W troviamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

dunque $\dim W = 2$ ed una base di W è data dai due vettori $(1, 0, -1, 0)$ e $(0, 5, 2, 5)$. Per determinare una base di $U + W$, osserviamo che una base di U ed una base di W insieme generano tutto il sottospazio $U + W$. Ovvero

$$U + W = \operatorname{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ 5 \end{vmatrix} \right)$$

Per estrarre una base da questo sistema di generatori per $U + W$, usiamo ancora una volta l'eliminazione gaussiana:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 5 \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\mapsto \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Una base di $U+W$ è data dunque dai tre vettori $(1,1,1,1)$, $(0,1,0,1)$ e $(0,0,1,0)$. In particolare $\dim(U+W)=3$. Volendo si possono fare un altro paio di eliminizioni per ottenere una base più “semplice”:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Otteniamo così la base $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,1)$ e $(0,0,1,0)$ di $U+W$. La dimensione di $U\cap W$ si calcola immediatamente mediante la formula di Grassmann:

$$\dim(U\cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 2+2-3 = 1$$

e la somma $U+W$ non è diretta.

Esercizio 7. Si consideri il sistema di 4 equazioni in 5 incognite:

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4 = 3 \\ x_1+x_2+x_3+2x_4-x_5 = 2 \\ x_1+x_2+3x_4-2x_5 = 1 \\ x_1+x_2+3x_3+x_5 = 4t \end{cases}$$

al variare di t in $\mathbb{R}$. Scrivere la matrice A dei coefficienti del sistema. Scrivere la matrice completa del sistema. Studiare la compatibilità del sistema al variare di $t\in\mathbb{R}$. Sia $t=1$. Determinare l'insieme $\Sigma\subset\mathbb{R}^5$ delle soluzioni del sistema. Scrivere Σ nella forma $\underline{v}_0+\mathrm{Span}(\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_\ell)$ per opportuni $\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_\ell$ in $\mathbb{R}^5$. Sia L_A l'applicazione lineare definita dalla matrice A dei coefficienti del sistema. Determinare una base per $\ker A$ ed una base per $\mathrm{Im}\, L_A$.

Soluzione. La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

La matrice completa è

$$A|b = \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 4t \end{array}\right|$$

Per studiare al compatibilità del sistema utilizziamo l'algoritmo di eliminazione di Gauss:

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 4t \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 4t-3 \end{array}\right|$$

$$\mapsto \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 4t-3 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4t-4 \end{array}\right|$$

Dunque il sistema ammette soluzioni solamente se $4t - 4 = 0$ ovvero se e solo se $t = 1$. Per questo particolare valore di t, la matrice del sistema ridotto a scala è

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Le ultime due righe corrsispondono all'identità $0 = 0$ e possono essere eliminate. Rimaniamo così con la matrice

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

che mediante un'ulteriore eliminazione diventa

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

Trattando come parametri le variabili corrispondenti alle colonne che non sono di pivot, troviamo che la soluzione del sistema è

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \alpha - 3\beta + 2\gamma \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 1 + \beta - \gamma \\ x_4 = \beta \\ x_5 = \gamma \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

In altre parole, l'insieme delle soluzioni del sistema è

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right)$$

Notiamo che da questa scrittura si legge anche

$$\ker L_A = \operatorname{Span}\left(\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right)$$

Infine, l'immagine di L_A è generata dalle colonne della matrice A. Per estrarre una base, scriviamo questi vettori come righe e utilizziamo nuovamente l'eliminazione gaussiana:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Una base di $\mathrm{Im} L_A$ è data dunque dai due vettori $(1, 1, 1, 1)$ e $(0, 1, 2, -1)$. Osserviamo che $L_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ e

$$\dim \mathrm{Im} L_A = 5 - \dim \ker L_A,$$

come dev'essere.