Algebra Lineare. a.a. 2003/03. Proff. K. O'Grady, P. Piazza
Soluzioni delle prova scritta dell'11/11/02

Esercizio 1. *Determinare se la seguente matrice 3×3 è invertibile, ed in caso affermativo calcolare la sua inversa:*

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Soluzione. Una matrice $n \times n$ è invertibile se e solo se è non-singolare, cioè se e solo se il rango è uguale a n. (Vedi pag. 47.) Utilizzando la riduzione di Gauss si verifica facilmente che per la nostra matrice $A \in M_{33}(\mathbb{R})$ si ha $\mathrm{rg(A)} = 3$. La matrice data è quindi invertibile. Per determinare l'inversa scriviamo

$$\left| \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

e applichiamo EG$\downarrow$, EG$\uparrow$ e la divisione per i pivots (vedi pag. 48). Otteniamo

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{ccc} 3/7 & 1/7 & -2/7 \\ -2/7 & -3/7 & 6/7 \\ -1/7 & 2/7 & 3/7 \end{array} \right|$$

Ne segue che

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 3/7 & 1/7 & -2/7 \\ -2/7 & -3/7 & 6/7 \\ -1/7 & 2/7 & 3/7 \end{vmatrix}$$

Esercizio 2. *Determinare al variare del parametro t le soluzioni del sistema di equazioni lineari*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + (t-1)x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + tx_2 + tx_3 + tx_4 = t \\ tx_1 + 2(t-1)x_2 + 2x_3 + 2x_4 = t^2 - 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Soluzione. Occorre ridurre a scala la matrice completa del sistema. Pensando all'algoritmo di Gauss è chiaro che conviene preliminarmente scambiare la prima e la quarta riga. Consideriamo quindi

$$\left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & t & t & t & t \\ t & 2(t-1) & 2 & 2 & t^2-2 \\ 1 & 1 & t-1 & 1 & 1 \end{array} \right|$$

Dopo il primo passo otteniamo

$$(1) \qquad \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-2 & t-2 & t-2 & t-2 \\ 0 & t-2 & 2-t & t-2 & t^2-t-2 \\ 0 & 0 & t-2 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

Se $t = 2$ il sistema è allora equivalente alla singola equazione

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

che ha come insieme delle soluzioni

$$\mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}\right) + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Se $t \neq 2$ allora possiamo moltiplicare la seconda, terza e quarta riga di (1) per $1/(t-2)$. Vi ricordo che questa operazione produce un sistema equivalente a quello dato. Otteniamo la matrice

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & t+1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Riducendo a scala otteniamo la matrice

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & t \\ 0 & 0 & 0 & -1 & t/2 \end{array}\right|$$

Per ogni $t \neq 2$ questa matrice ha rango 4 ed esiste quindi unica la soluzione. Fissato $t \neq 2$ otteniamo la soluzione $x_1 = 0, x_2 = (t+2)/t, x_3 = 0, x_4 = -t/2$.

Esercizio 3. *Siano $U, V \subset \mathbb{R}^3$ i sottospazi dati da*

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{vmatrix}\right), \quad V = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}\right).$$

Determinare una base di $U \cap V$.

Soluzione. Un modo di risolvere questo esercizio è quello di esprimere U e V come soluzioni di sistemi lineari omogenei e trovare poi una base di $U \cap V$ risolvendo il sistema ottenuto prendendo sia le equazioni per U che le equazioni per V.

Prima di tutto osserviamo che V ha dimensione 2, dato che i due vettori sono chiaramente non-proporzionali. Per trovare una base di U operiamo una riduzione di Gauss sulla matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

e applichiamo la Proposizione 4.4 pag. 70. Scopriamo in questo modo che U ha dimensione 2 e che una base è data, ad esempio, dai primi due vettori. Ora operiamo con Gauss su [1]

$$\left|\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 2 & -2 & x_2 \\ -3 & 0 & x_3 \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \end{array}\right|$$

e otteniamo

$$\left|\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -6 & -2x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & x_1 + x_2 + x_3 \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & x_1 \\ 0 & 6 & x_1 - x_2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 - x_3 \end{array}\right|$$

[1] vedi soluzioni compito a casa per il fine settimana del 9/10 Novembre

da cui deduciamo che

$$U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}\,, \qquad V = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0\}\,.$$

Quindi $U \cap V$ è costituito dalle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema troviamo che $U \cap V = \mathrm{Span}(-7/5, 2/5, 1)$.

Esercizio 4. *Siano $U, V \subset \mathbb{R}^4$ i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ dati da*

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} \right), \quad V = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix} \right).$$

Stabilire se $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di U e V, cioè se $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

Soluzione. Procedendo come nell'esercizio precedente determiniamo innanzitutto basi per questi due sottospazi. Scopriamo che

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right), \quad V = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{vmatrix} \right).$$

È chiaro che queste due coppie di vettori sono basi rispettivamente per U e V. Avendo determinato basi per U e V possiamo cercare di applicare la Proposizione 6.7 pag. 82. Se i quattro vettori trovati sono una base per $\mathbb{R}^4$ allora, per la Proposizione, possiamo concludere che $U \oplus V = \mathbb{R}^4$. Per verificare quest'ultimo fatto, basta mettere i 4 vettori in colonna e ridurre con Gauss. Scopriamo che il rango della relativa matrice 4×4 è proprio 4; ne segue che i 2+2=4 vettori sono linearmente indipendenti e quindi, necessariamente, una base di $\mathbb{R}^4$, come volevasi. In alternativa, senza utilizzare la Proposizione pag. 82, potevamo ragionare con la formula di Grassmann: una volta verificato che i quattro vettori sono linearmente indipendenti abbiamo che $U+V = \mathbb{R}^4$ e quindi, per Grassmann, che $\dim(U \cap V) = 0$, cioè $U \cap V = \{\underline{0}\}$. Ma allora $U \oplus V = \mathbb{R}^4$ dato che $U + V = \mathbb{R}^4$ **e** $U \cap V = \{\underline{0}\}$.
Un terzo modo, più lungo, di risolvere l'esercizio era il seguente:
troviamo equazioni per U e per V, una volta appurato come sopra che hanno entrambi dimensione 2. Prendendo le 2+2 equazioni ottenute, andiamo a studiare $U \cap V$, come nell'esercizio precedente, risolvendo il sistema di 4 equazioni e 4 incognite che ne risulta ; scopriamo che $U \cap V = \{\underline{0}\}$. Dalla formula di Grassmann segue che $\dim(U + V) = 4$ e quindi che $U + V = \mathbb{R}^4$. Ne segue che $U \oplus V = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 5. *Sia $A \in M_{34}(\mathbb{R})$ la matrice data da*

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

e sia $F_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare ad essa associata. Determinare una base per $\mathrm{Ker}(F_A)$ ed una base per $\mathrm{Im}(F_A)$. Studiare iniettività e suriettività di F_A.

Soluzione. Sappiamo che

$$\mathrm{Ker}(F_A) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid F_A(\underline{x}) = \underline{0}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\underline{x} = \underline{0}\}\,;$$

basta allora risolvere il sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ trovandone una base (pag 42, pag 146). Abbiamo visto molti esercizi di questo tipo (incluso l'esercizio 2 di questo esonero): riducendo con Gauss, risolvendo il sistema e "mettendo in evidenza le variabile libere" otteniamo che

$$\mathrm{Ker}(F_A) = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right).$$

Dato che il necleo è non banale, ne segue che F_A non è iniettiva.
Abbiamo visto che $\mathrm{Im}F_A$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne di A; la riduzione di Gauss, già effettuata, ci dice che i primi due vettori colonna di A sono una base per lo spazio generato dalle colonne di A. Dato che $\mathrm{Im}F_A$ non è tutto $\mathbb{R}^3$, essendo di dimensione 2, ne segue F_A non è suriettiva.

Esercizio 6. *Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ i vettori dati da*

$$\underline{v}_1 = (1,2), \quad \underline{v}_2 = (1,-1).$$

Si noti che $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti. Sappiamo che esiste una e una sola applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$F(1,2) = (0,1), \quad F(1,-1) = (3,1).$$

Determinare la matrice $A \in M_{22}(\mathbb{R})$ associata a F quando si sia scelta la base canonica come base di partenza e la base canonica come base di arrivo.

Soluzione. Sia $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$. La matrice cercata A è per definizione la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate, nella base canonica di arrivo, del vettore $F(\underline{e}_j)$. Quindi, la prima colonna di A è data dalle coordinate di $F(1,0)$ nella base canonica e la seconda colonna di A è data dalle coordinate di $F(0,1)$ nella base canonica. Per calcolare queste coo rdinate esprimiamo $(1,0)$ e $(0,1)$ in funzione di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$, sui quali sappiamo calcolare F, e poi applichiamo la linearità. È subito visto che

$$(1,0) = \frac{1}{3}(1,2) + \frac{2}{3}(1,-1), \qquad (0,1) = \frac{1}{3}(1,2) - \frac{1}{3}(1,-1)$$

da cui

$$F(1,0) = F(\frac{1}{3}(1,2) + \frac{2}{3}(1,-1)) = \frac{1}{3}F(1,2) + \frac{2}{3}F(1,-1) = (2,1) = 2\underline{e}_1 + \underline{e}_2\ ;$$

analogamente

$$F(0,1) = F(\frac{1}{3}(1,2) - \frac{1}{3}(1,-1)) = \frac{1}{3}F(1,2) - \frac{1}{3}F(1,-1) = (-1,0) = -\underline{e}_1 + 0\underline{e}_2$$

Quindi

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$