Algebra Lineare. a.a. 2003/03. Prof. P. Piazza
Soluzioni per il secondo esonero. 8 Gennaio 2003

Soluzioni esercizio 1. Il polinomio caratteristico di A è

$$P_A(\lambda) = \det \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 9 \\ 1 & -1-\lambda & -15 \\ 0 & 1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-2)^2.$$

Quindi gli autovalori di A sono 0 e 2, con molteplicità algebrica 1 e 2 rispettivamente. Per gli autospazi relativi abbiamo

$$V_0 = \mathrm{Ker}A, \quad V_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I_3).$$

Calcolando si ottiene

$$V_0 = \mathrm{Span}((9,-6,1)), \quad V_2 = \mathrm{Span}((3,-4,1)).$$

Quindi la molteplicità geometrica di ciascun autovalore è 1. Dato che la molteplicità algebrica di 2 è 2 concludiamo che A non è diagonalizzabile (né su $\mathbb{R}$, né su $\mathbb{C}$).
Soluzione esercizio 2. Il polinomio caratteristico di T è

$$P_T(\lambda) = \det \begin{vmatrix} 16-\lambda & -21 \\ 10 & -13-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2.$$

Gli autovalori di T sono 1 e 2; essendo distinti ne segue che T è diagonalizzabile. Una base costituita di autovettori è

$$\{(3,2),(7,5)\}$$

(associata agli autovalori 2 e 1 rispettivamente). Sappiamo allora che

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}^{-1} \cdot T \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

da cui segue che

$$T = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}^{-1}$$

Quindi

$$T^{10} = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1024 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 15.346 & -21.462 \\ 10.230 & -14.321 \end{vmatrix}$$

Soluzione esercizio 3. La matrice cercata ha come prima colonna le coordinate di $F_A(0,2)$ nella base $\{(0,1),(1,2)\}$ e come seconda colonna le coordinate di $F_A(1,1)$ nella base $\{(0,1),(1,2)\}$. Si ha

$$F_A(0,2) = A \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 4 \end{vmatrix}, \quad F_A(1,1) = A \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

D'altra parte

$$(0,4) = 4(0,1) + 0(1,2)\,, \quad (2,1) = -3(0,1) + 2(1,2)$$

da cui la matrice cercata

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Soluzione alternativa. La matrice A è la matrice associata ad F_A nella base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ (come base di arrivo e come base di partenza). Se B è la matrice cercata abbiamo schematicamante

$$A \text{ associata a } \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\} \quad \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$$
$$B \text{ associata a } \{(0,2),(1,1)\}, \quad \{(0,1),(1,2)\}.$$

Sappiamo che

$$B = D^{-1}AC$$

con

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Calcolando l'inversa di D e svolgendo il prodotto righe per colonne ritroviamo la matrice

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Soluzione esercizio 4. Basta applicare il procedimento di Gram-Schmidt ai 3 vettori dati. Si ottine la base ortonormale:

$$\underline{u}_1 = \frac{2}{11}\underline{i} + \frac{6}{11}\underline{j} + \frac{9}{11}\underline{k}, \quad \underline{u}_2 = \frac{9}{11}\underline{i} - \frac{6}{11}\underline{j} + \frac{2}{11}\underline{k},$$
$$\underline{u}_3 = \frac{6}{11}\underline{i} + \frac{7}{11}\underline{j} - \frac{6}{11}\underline{k}$$

Soluzione esercizio 5. Per verificare che i tre punti non sono allineati basta scrivere equazioni per la retta P_1P_2 e poi verificare che P_3 non soddisfa queste equazioni. Alternativamente, basta verificare che

$$\underline{OP_2} - \underline{OP_1} \notin \mathrm{Span}(\underline{OP_3} - \underline{OP_1}).$$

Entrambe le verifiche sono immediate. L'equazione del piano per 3 punti è ben nota e si ottiene

$$4x + 2y - z - 5 = 0.$$

Soluzione esercizio 6. I parametri direttori di r sono proporzionali ai coefficienti di giacitura di π. Ne segue che r è la retta per $(1,-1,2)$ e di parametri direttori $\ell = 1$, $m = -1$, $n = -3$. Scrivendo equazioni parametriche ed eliminando il parametro otteniamo equazioni cartesiane per r:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + z - 5 = 0 \end{cases}.$$