**Algebra Lineare. a.a. 2003/03. Prof. P. Piazza**
**Soluzioni per l'esame del 14 Gennaio 2003**

**Soluzione esercizio 1.** Sia $A$ la matrice cercata.
Il sottospazio $U$ ha dimensione 2; il sottospazio $W$ ha dimensione 1. Una base per $U$ è data da

$$\underline{v}_1 = (1,-1,0)\,, \quad \underline{v}_2 = (1,0,-1)\,;$$

una base per $W$ è data da $\underline{v}_3 = (1,1,1)$. I vettori $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. Il testo dell'esercizio ci dà la seguente informazione

$$F\underline{v}_1 = \underline{v}_1\,, \quad F(\underline{v}_2) = \underline{v}_2\,, \quad F(\underline{v}_3) = -\underline{v}_3\,;$$

$\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per $F$ e la matrice associata ad $F$ in questa base di autovettori è la matrice diagonale

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

A questo punto possiamo procedere in due modi:
(1) Esprimiamo i vettori della base canonica in funzione della base di autovettori e sfruttiamo la linerità di $F$ per determinare le coordinate, rispetto alla base canonica, di $F(1,0,0), F(0,1,0), F(0,0,1)$. Quindi

$$F(1,0,0) = F(\frac{1}{3}(1,-1,0) + \frac{1}{3}(1,0,-1) + \frac{1}{3}(1,1,1)) =$$

$$\frac{1}{3}F(1,-1,0) + \frac{1}{3}F(1,0,-1) + \frac{1}{3}F(1,1,1) = \frac{1}{3}(1,-1,0) + \frac{1}{3}(1,0,-1) - \frac{1}{3}(1,1,1)$$

da cui

$$F(1,0,0) = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})\,;$$

questa è la prima colonna della matrice cercata. Procedendo analogamente con le altre due colonne si trova

$$A = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

(2) Un secondo metodo per concludere l'esercizio fa uso della formula che lega le matrici associate ad uno stesso endomorfismo in basi diverse. La situazione qui è la seguente:

$$A \quad \text{associata a} \quad \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\} \quad \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{associata a} \quad \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\} \quad \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$$

La formula ci dice che $\Delta = C^{-1}AC$, con $\begin{vmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \end{vmatrix} C$ cioè

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ne segue che $A = C\Delta C^{-1}$. Calcolando l'inversa di $C$ e svolgendo il prodotto otteniamo nuovamente la matrice $A$.

**Soluzione esercizio 2.** (1) Falsa. Il sottoinsieme $V$ non è chiuso rispetto alla somma di matrici. Ad esempio:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

sono due matrici in $V$ ma la loro somma ha determinante uguale ad 1. Analoghi controesempi possono essere costruiti per matrici $m \times m$.

(2) Falsa. Il sottoinsieme $W$ non contiene, ad esempio, l'opposto di ogni suo elemento.

(3) Vero. Segue dalla bilinearità del prodotto scalare.

(4) Vero: un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con $m < n$, non può essere iniettiva Infatti la dimensione del suo nucleo è $n - \mathrm{rg}(A)$ con $A$ la matrice associata ad $F$ in una qualsiasi base. Ma $\mathrm{rg}(A) \leq m$ e quindi, essendo $n > m$, ne segue che $n - \mathrm{rg}(A) > 0$.

(5) Falsa. Basta prendere l'applicazione nulla.

**Soluzione esercizio 3.** Sappiamo che $\mathrm{Im}\, F_A$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dalle colonne di $A$ e che una base di $\mathrm{Im}\, F_A$ è data dalle colonne di $A$ corrispondenti ai pivots di una riduzione a scala di $A$. Sappiamo poi che $\mathrm{Ker} F_A$ è costituito dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$. Riducendo a scala $A$ otteniamo una base di $\mathrm{Im}(F_A)$

$$\{(2, 1, 0, -1), (5, 4, -3, -7)\}$$

Utilizzando la matrice ridotta e risolvendo il sistema $A\underline{x} = \underline{0}$ otteniamo anche una base di $\mathrm{Ker}(F_A)$:

$$\{(-4, 1, 0, 3), (-5, 2, 3, 0)\}.$$

**Soluzione esercizio 4.** Il polinomio caratteristico di $A$ è $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$ che ha radici $1 \pm i$. Ne segue che $A$ non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$, ma è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ (autovalori distinti). La matrice $\Delta$ è in questo caso la matrice

$$\begin{vmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{vmatrix};$$

la matrice diagonalizzante $C$ è la matrice che ha come colonne le coordinate degli autovettori di $F_A^{\mathbb{C}}$, l'applicazione lineare $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definita da $A$. Si trova

$$V_{1+i} = \mathbb{C}(i, 1)\,, \qquad V_{1-i} = \mathbb{C}(-i, 1)\,.$$

Si ha quindi

$$\begin{vmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} A \begin{vmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{vmatrix}$$

**Soluzione esercizio 5.** Sappiamo che se due matrici sono coniugate allora hanno lo stesso polinomio caratteristico; quindi se non hanno lo stesso polinomio caratteristico ne segue che non sono coniugate. Calcolando i polinomi caratteristici scopriamo che le uniche matrici che *possono* essere coniugate sono $A_1$ ed $A_3$ [1]. Un ulteriore ragionamento mostra poi che $A_1$ e $A_3$ sono effettivamente coniugate: infatti entrambe sono coniugate alla matrice diagonale

$$\begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

**Soluzione esercizio 6.** Le equazioni cartesiane della retta $r$ sono

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ 2y-z-1=0 \end{cases}$$

I parametri direttori della retta $r'$ sono $(-3,2,3)$.
Il fascio di piani per $r$ è dato da $\lambda(x+y-1)+\mu(2y-z-1)=0$, al variare di $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$; il piano cercato si ottiene imponendo il parallelismo con il sottospazio $\mathbb{R}(-3,2,3)$. Otteniamo il piano $x+3y-z-2=0$.

**Soluzione esercizio 7.** Passando ad equazioni parametriche per $r$ si ottengono i suoi punti nella forma

$$P(t)=(-t+1,\frac{2}{3}t-\frac{1}{3},t),$$

al variare di $t$ in $\mathbb{R}$. Cerchiamo fra questi i punti che hanno distanza $\sqrt{5}$ da $Q=(0,1,0)$. Basta imporre che $d(P(t),Q)^2=5$; se ne ricava l'equazione di secondo grado in $t$

$$11t^2-17t-10=0$$

che ha soluzioni $t_1=2$ e $t_2=-5/11$. Risostituendo si ottengono i due punti cercati

$$(-1,1,2),\quad (16/11,-7/11,-5/11).$$

[1]Attenzione: due matrici che hanno lo stesso polinomio carattteristico non sono necessariamente coniugate ! Ad esempio $A=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ hanno lo stesso polinomio carattersitico, $\lambda^2$, ma *non* sono coniugate (infatti coniugando la matrice nulla con una qualsiasi matrice invertibile otteniamo sempre la matrice nulla).