Algebra Lineare. a.a. 2003/03. Prof. P. Piazza
Soluzioni per l'esame del 3 Febbraio 2003

Soluzione esercizio 1.
Notiamo innanzitutto che

$$U = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{vmatrix} \right)$$

e che questi due vettori costituiscono una base per U. Equazioni cartesiane per U si ottengono riducendo con Gauss

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ -4 & 2 & y \\ 3 & -3 & z \end{array} \right|$$

ed imponendo la compatibilità [1]. Si ottiene l'equazione

$$x + y + z = 0\,.$$

Procedendo analogamente si ottiene l'equazione cartesiana per V:

$$x - 4y + 3z = 0$$

Quindi equazioni cartesiane di $U \cap V$ sono

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 4y + 3z = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene

$$\text{Base di } U \cap V\text{: } \{(7, -2, -5)\}.$$

Soluzione esercizio 2.
Sfruttando la linerità di F abbiamo:

$$\begin{aligned} F(1,0,0) &= F(1,1,1) - F(0,1,1) = (0,-1,1) \\ F(0,1,0) &= \frac{1}{2}F(0,1,1) + \frac{1}{2}F(0,1,-1) = (1,2,-1) \\ F(0,0,1) &= \frac{1}{2}F(0,1,1) - \frac{1}{2}F(0,1,-1) = (0,1,0) \end{aligned}$$

Quindi la matrice associata ad F nella base canonica è

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Soluzione esercizio 3.
Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(\lambda) = (\lambda^2 - 1)^2.$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda = 1$, con molteplicità algebrica 2, e $\lambda = -1$, con molteplicità algebrica 2. Risolvendo i sistemi di equazioni lineari omogenee con

[1] vedi soluzioni compito a casa per il fine settimana del 9/10 Novembre

matrici associate $(A - \mathrm{Id})$ e $(A + \mathrm{Id})$ si ottengono basi degli autospazi $V_1(F_A)$ e $V_{-1}(F_A)$ rispettivamente. Si trova:
Base di $V_1(F_A)$: $\{(1,0,0,0),(0,0,1,1)\}$,
Base di $V_{-1}(F_A)$: $\{(0,1,0,0),(0,0,1,-1)\}$.
Ne deduciamo che

$$m_g(1) = m_a(1)\,, \quad m_g(-1) = m_a(-1)\,;$$

ne segue che F_A è diagonalizzabile e una base di autovettori è data da

$$\{(1,0,0,0),(0,0,1,1),(0,1,0,0),(0,0,1,-1)\}.$$

Soluzione esercizio 4. Scegliamo per $\underline{f}_1$ un qualsiasi vettore non nullo di W, per esempio

$$\underline{f}_1 = \underline{i} + \underline{j}$$

Se $\underline{f}_2 = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ si deve avere

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y = 0. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo

$$\underline{f}_2 = \underline{i} - \underline{j} - 2\underline{k}.$$

(O un qualsiasi suo multiplo non nullo.) [2] Il vettore $\underline{f}_3$ è dato da $t\underline{f}_1 \wedge \underline{f}_2$, dove t è tale che $||t\underline{f}_1 \wedge \underline{f}_2||^2 = 12$. Calcolando si ottiene

$$\underline{f}_3 = 2\underline{i} - 2\underline{j} + 2\underline{k}.$$

(O il suo opposto.)

Soluzione esercizio 5. La linearità di T segue dalle properietà di linearità del prodotto scalare [3].Calcolando si ottiene

$$T(\underline{i}) = \frac{1}{2}\underline{i} - \frac{1}{2}\underline{k}$$
$$T(\underline{j}) = \underline{j}$$
$$T(\underline{k}) = -\frac{1}{2}\underline{i} + \frac{1}{2}\underline{k}$$

Quindi la matrice associata a T nella base $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ è

$$A = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{vmatrix}$$

Avendo la matrice A otteniamo facilmente basi per $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$:
Base di $\mathrm{Ker}(T)$: $\{(1,0,1)\}$,

[2] In alternativa, potevano fissare una qualsiasi base di W, ad esempio

$$\underline{g}_1 = \underline{i} + \underline{j} \quad \text{e} \quad \underline{g}_2 = \underline{j} + \underline{k}$$

e poi porre

$$\underline{f}_1 = \underline{g}_1\,, \quad \underline{f}_2 = \underline{g}_2 - \frac{<\underline{g}_2, \underline{f}_1>}{<\underline{f}_1, \underline{f}_1>}\underline{f}_1$$

[3] Si poteva anche riconoscere subito che l'applicazione T è la proiezione ortogonale sul piano perpendicolare a $\underline{u}$ e abbiamo verificato a lezione che una tale applicazione è lineare

Base di $\mathrm{Im}(T)$: $\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$.

Soluzione esercizio 6.
Vettori direttori di r e s sono dati da

$$(3,-2,-3), \quad (1,-1,1)$$

rispettivamente. Questi due vettori sono 2 vettori di giacitura del piano; ne segue che l'equazione del piano è

$$\det \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

e cioè

$$5x + 6y + z - 12 = 0$$

In alternativa: i parametri di giacitura di un piano parallelo ad r ed s sono dati da

$$\left(\det \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, -\det \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \det \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right)$$

e perciò l'equazione cartesiana del piano per $P_0 = (1,1,1)$ parallelo ad r ed s è

$$5(x-1) + 6(y-1) + z - 1 = 0$$

ovvero

$$5x + 6y + z - 12 = 0$$

Soluzione esercizio 7.
Un vettore direttore di r è

$$\underline{v} = 3\underline{i} - 2\underline{j} - 3\underline{k}.$$

Equazioni parametriche di r sono date da

$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

Sia $P(t) \in r$ il punto che corrisponde al parametro t; il vettore

$$\underline{P_0P(t)} = (3t-1)\underline{i} - 2t\underline{j} + (2-3t)\underline{k}$$

rappresenta il vettore direttore della retta per P_0 e $P(t)$. Imponendo a tale vettore di essere perpendicolare a $\underline{v}$ otteniamo l'equazione $22t - 9 = 0$. Quindi un vettore direttore della retta passante per P_0, incidente r ed ortogonale a r è

$$5\underline{i} - 18\underline{j} + 17\underline{k}$$

ed equazioni parametriche della retta cercata sono date da

$$\begin{cases} x = 5t \\ y = 1 - 18t \\ z = 17t \end{cases}$$

Eliminando la t abbiamo equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 18x + 5y = 5 \\ 17x - 5z = 0 \end{cases}$$

La retta cercata poteva anche ottenersi come intersezione del piano per P_0 ortogonale ad r e del piano per r e P_0.