Geometria 1. I^0 Modulo. a.a. 00/01.
Soluzioni esame del 21/02/01

Esercizio 1. I due piani dati si intersecano in una retta r'; la retta cercata è parallela a r' e passa per P. Parametri direttori per r' sono dati da

$$\det\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\,, \quad \det\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\,, \quad \det\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\,.$$

Ne segue che le equazioni parametriche della retta cercata sono

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$$

Esercizio 2. I punti della retta r sono dati da $\{P_t = (1+t, t), t \in \mathbb{R}\}$. Cerchiamo $t \in \mathbb{R}$ tale che il vettore direttore della retta P_1P_t sia ortogonale al vettore direttore della retta P_2P_t. Abbiamo visto che il vettore direttore della retta per due punti, $Q_1 = (x_1, y_1)$ e $Q_2 = (x_2, y_2)$, è $\mathbf{OQ_2} - \mathbf{OQ_1}$ e cioè il vettore di coordinate $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Ne segue che i vettori direttori della retta P_1P_t e della retta P_2P_t sono rispettivamente

$$(-t, 1-t)\,, \quad (2-t, -2-t)\,.$$

Imponendo l'ortogonalità fra questi due vettori otteniamo l'equazione $2t^2 - t - 2 = 0$. Si trovano due valori di t e risostituendo in P_t otteniamo le coordiante dei (due) punti che soddisfano la condizione data

$$((5+\sqrt{17})/4, (1+\sqrt{17})/4)\,, \quad ((5-\sqrt{17})/4, (1-\sqrt{17})/4)\,.$$

Esercizio 3. Dalle equazioni parametriche di V si ottengono per eliminazione del parametro le seguenti equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Esercizio 4. Utilizzando l'eliminazione di Gauss si verifica facilmente che $\mathrm{Ker}F_A = \{X \in \mathbb{R}^4 ; SX = 0\}$ con

$$S = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Risolvendo il sistema a scala si ottiene per $\mathrm{Ker}F_A$ la base $\{(-2,3,1,0), (2,-1,0,1)\}$. Dato che il nucleo è non banale si ha che F_A non è iniettiva. Dato che il rango di A non è tre (ma due), ne segue che F_A non è suriettiva.

Esercizio 5. Il polinomio caratteristico di B_u è $(2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$ che ha radici $\lambda_1 = 2$ con molteplicità 2 e $\lambda_2 = 0$ con molteplicità 1. Consideriamo l'autovalore $\lambda_1 = 2$. L'autospazio associato è dato da

$$\{X \in \mathbb{R}^3 \; ; \; (B_u - 2I_3)X = 0\}$$

Ma

$$B_u - 2I_3 = \begin{vmatrix} -1 & u/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & u & -1 \end{vmatrix}\;;$$

la dimensione di questo autospazio, che è la molteplicità geometrica dell'autovalore è uguale a 2 se e solo se $u = 0$. Per il teorema fondamentale sulla diagonalizzabilità ne segue che F_u è diagonalizzabile se e solo se $u = 0$. (Per l'autavalore 0 la molteplicità algebrica è automaticamente uguale a quella geometrica.)

Esercizio 6. Gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica uguale a 2 e $\lambda_2 = -1$ con molteplicità algebrica uguale a 1. V_1 è il piano di equazione $x_1 - x_3 = 0$. Ne segue già che F_A è diagonalizzabile. Una base per V_1 è data dalla coppia $\{(1,0,1),(0,1,0)\}$ e dato che $V_{-1} = \mathbb{R}(1,1,0)$ ne segue che una base di autovettori di $\mathbb{R}^3$ è costituita da
$$\{(1,0,1),(0,1,0),(1,1,0)\}.$$
La matrice associata a F_A in questa base è, ovviamente,
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$