Algebra Lineare. a.a. 2004-05. Gruppo A-H. Prof. P. Piazza
Soluzioni compito a casa del 22/12/04

Esercizio 1. Sia $W = \mathbb{R}(1,-1,1)$ (Utilizziamo la notazione $\mathbb{R}(l,m,n)$ per il sottospazio Span$((l,m,n))$.) Determinare un versore di questa retta. Determinare il versore di questa retta che forma un angolo acuto con il vettore $\underline{j}$ della base canonica.

Soluzione. Un vettore non nullo della retta W è il vettore $\underline{v} = (1,-1,1)$. Dunque i versori di W sono $\underline{v}_1 = \underline{v}/\|\underline{v}\| = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ e $\underline{v}_2 = -\underline{v}/\|\underline{v}\| = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ Per determinare quale tra $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ formi un angolo acuto con il versore $\underline{j}$, basta ricordarsi che due vettori formano un anglo acuto se e solo se il coseno dell'angolo che formano è positivo, ovvero se e solo se il loro prodotto scalare è positivo. Si calcola immediatamente $\langle \underline{v}_1, \underline{j}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\langle \underline{v}_2, \underline{j}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}$, dunque il versore richiesto è $\underline{v}_2$.

Esercizio 2. Sia W la retta vettoriale di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Determinare i vettori di W che hanno lunghezza uguale a 2.

Soluzione. Una base di W è data dal vettore $(1,1,0)$. Ne segue che i vettori di W sono tutti e soli i vettori di $\mathbb{R}^3$ della forma $(\lambda,\lambda,0)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Quelli di lunghezza 2 sono quelli per cui $\sqrt{\lambda^2+\lambda^2} = 2$, ovvero quelli con $\lambda = \pm\sqrt{2}$. Esplicitamente, si tratta dei due vettori $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ e $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$.

Esercizio 3. Determinare le coordinate dei vettori $\underline{v}$ che hanno lunghezza uguale a 2 e sono ortogonali sia a $\underline{f} = (1,-1,2)$ che a $\underline{g} = (0,1,-1)$. (I vettori di lunghezza 2 sono anche i vettori il cui quadrato della lunghezza è 4.)

Soluzione. Un vettore ortogonale a $\underline{f} = (1,-1,2)$ e a $\underline{g} = (0,1,-1)$ è il vettore

$$\underline{f} \wedge \underline{g} = \det \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & 1 & 0 \\ \underline{e}_2 & -1 & 1 \\ \underline{e}_3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1,1,1)$$

I vettori di $\mathbb{R}^3$ ortogonali a due vettori linearmente indipendenti formano un sottospazio vettoriale di dimensione 1; dunque i vettori di $\mathbb{R}^3$ ortogonali sia a $\underline{f}$ che a $\underline{g}$ sono tutti e soli i vettori della forma $\lambda \underline{f} \wedge \underline{g} = (-\lambda, \lambda, \lambda)$. Tra questi, quelli di lunghezza 2 sono quelli per cui $3\lambda^2 = 4$, ovvero quelli per cui $\lambda = \pm 2/\sqrt{3}$. Esplicitamente, si tratta dei due vettori $(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{2}{\sqrt{3}})$ e $(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}})$.

Esercizio 4. Consideriamo il piano vettoriale σ di equazione cartesiana

$$x + 2y - z = 0$$

(i) Verificare che i vettori

$$\underline{f}_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0) \qquad \underline{f}_2 = (\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}})$$

costituiscono una base *ortonormale* di σ.

(ii) Decomporre il vettore $\underline{u} = (0, 1, 2)$ del piano σ nella somma $\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$ con $\underline{u}_1 \in \mathbb{R}\underline{f}_1$ e $\underline{u}_2 \in \mathbb{R}\underline{f}_2$. [1]

Soluzione. Si ha $\langle \underline{f}_1, \underline{f}_2 \rangle = \frac{2}{\sqrt{150}} - \frac{2}{\sqrt{150}} = 0$ e quindi i due vettori sono ortogonali. Inoltre,

$$||\underline{f}_1|| = 1\,, \quad ||\underline{f}_2|| = 1$$

e quindi i due vettori sono ortonormali. Dato che le coordinate di $\underline{f}_1$ e quelle di $\underline{f}_2$ soddisfano l'equazione del piano, concludiamo che $\{\underline{f}_1, \underline{f}_2\}$ costituiscono una base ortonormale del piano σ.
Per (ii): il suggerimento ci dice che

$$\underline{u}_1 = \langle \underline{u}, \underline{f}_1 \rangle \underline{f}_1\,, \quad \underline{u}_2 = \langle \underline{u}, \underline{f}_2 \rangle \underline{f}_2$$

e si tratta solo di fare i due prodotti scalari. Facendo i conti otteniamo $\langle \underline{u}, \underline{f}_1 \rangle = -1/\sqrt{5}$ e $\langle \underline{u}, \underline{f}_2 \rangle = 12/\sqrt{30}$; quindi $\underline{u}_1 = (-2, 1, 0)$, $\underline{u}_2 = (2/5, 4/5, 2)$.
Per giustificare il ragionamento del suggerimento basta ragionare come segue: sappiamo che $\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$ con $\underline{u}_1 = \alpha \underline{f}_1$, $\underline{u}_2 = \beta \underline{f}_2$. Dato che $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$ è una base ortonormale di σ si ha:

$$\langle \underline{u}, \underline{f}_1 \rangle = \langle \alpha \underline{f}_1 + \beta \underline{f}_2, \underline{f}_1 \rangle = \alpha \langle \underline{f}_1, \underline{f}_1 \rangle + \beta \langle \underline{f}_2, \underline{f}_1 \rangle \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = \alpha.$$

Quindi $\langle \underline{u}, \underline{f}_1 \rangle = \alpha$; analogamente $\langle \underline{u}, \underline{f}_2 \rangle = \beta$, come volevasi.

Esercizio 5. Spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$ con base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ fissata e coordinate associate (x, y, z).
Applicare il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt alla seguente base di $\mathcal{V}_O$:

$$\underline{w}_1 = (1, 1, 0)\,, \quad \underline{w}_2 = (0, 1, 0)\,, \quad \underline{w}_3 = (0, 0, 2)\,.$$

Soluzione. Basta applicare meccanicamente il procedimento: prima troviamo una base ortogonale, poi la normalizziamo moltiplicando ogni vettore per l'inverso della sua lunghezza.
Applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt: $\underline{u}_1 = \underline{w}_1 = (1, 1, 0)$

$$\underline{u}_2 = \underline{w}_2 - \frac{\langle \underline{w}_2, \underline{u}_1 \rangle}{\langle \underline{u}_1, \underline{u}_1 \rangle} \underline{u}_1 = (0, 1, 0) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$$

Infine $\underline{u}_3 = \underline{w}_3$ dato che $\langle \underline{w}_3, \underline{u}_1 \rangle = 0$ e $\langle \underline{w}_3, \underline{u}_2 \rangle = 0$. La base cercata è quindi:

$$\left\{ (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\,, \quad (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)\,, \quad (0, 0, 1) \right\}$$

[1] *Suggerimento per (ii).* Sappiamo che $\underline{u} \in \sigma$. Quindi esistono coefficienti α e β tali che $\underline{u} = \alpha \underline{f}_1 + \beta \underline{f}_2$ e per definizione sarà $\underline{u}_1 = \alpha \underline{f}_1$, $\underline{u}_2 = \beta \underline{f}_2$. Utilizzare il fatto che $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$ è una base ortonormale di σ e le proprietà di linearità del prodotto scalare per dimostrare che $\langle \underline{u}, \underline{f}_1 \rangle = \alpha$ e che $\langle \underline{u}, \underline{f}_2 \rangle = \beta$. Questo ragionamento non dovrebbe risultarvi nuovo....