Algebra Lineare. a.a. 2004-05. Gruppo A-H. Prof. P. Piazza
Soluzione esercizi su autovalori e autovettori del 14/1/05

Soluzione esercizio 1.
(i) L'applicazione $F_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ è definita da una matrice non-singolare. Ne segue che F_A è iniettiva e suriettiva. Inoltre F_A ha 5 autovalori *distinti*: ne segue che esistono 5 autovettori linearmente indipendenti, ne segue che F_A è diagonalizzabile.
(ii) Il polinomio caratteristico di F_A è uguale a $P_A(\lambda) = (1-\lambda)^5$. L'operatore F_A ammette quindi il solo autovalore $\lambda = 1$ con molteplicità algebrica 5. D'altra parte l'autospazio associato a tale autovalore è

$$\mathrm{Ker}(F_A - \mathrm{Id}) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \,|\, (A - I_5)\underline{x} = \underline{0}\}$$

Questo è il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ costituito dai vettori $\underline{x} \in \mathbb{R}^5$ tali che

$$\begin{cases} x_2 + \pi x_4 = 0 \\ \sqrt{2}x_3 + \pi x_5 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

Ne segue che la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 1$ è uguale a 2; dato che per questo autovalore la molteplicità algebrica è diversa da quella geometrica ne segue che F_A *non* è diagonalizzabile.

Soluzione esercizio 2. Per definizione

$$F(1,1) = -2(1,1) = (-2,-2)\,, \qquad F(-1,0) = 3(-1,0) = (-3,0)\,.$$

F è allora univocamente determinata dalle condizioni date perché è lineare e perché è nota sui vettori $\underline{v}_1 = (1,1)$ e $\underline{v}_2 = (-1,0)$ che sono una base di $\mathbb{R}^2$. Per definizione risulta

$$F\underline{v}_1 = -2\underline{v}_1 = -2\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2\,, \quad F\underline{v}_2 = 3\underline{v}_2 = 0\underline{v}_1 + 3\underline{v}_2\,;$$

ne segue che la matrice associata ad F nella base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è la matrice diagonale

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Schematicamente:

$$A \text{ associata a } \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\} \quad \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}\,.$$

Vogliamo trovare

$$B \text{ associata a } \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\} \quad \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}\,.$$

Sia M la matrice che ha come colonne le coordinate della base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ rispetto alla base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$: quindi

$$\begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 \end{vmatrix} M$$

Sappiamo che

$$B = M^{-1}AM$$

Noi non conosciamo M ma conosciamo M^{-1} perché conosciamo M' tale che

$$\begin{vmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 \end{vmatrix} M'\,,$$

(infatti $M' = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$) e sappiamo che $M' = M^{-1}$, da cui

$$M = (M')^{-1} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right)^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

e quindi, in definitiva,

$$B = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \dots .$$

Soluzione esercizio 3. Calcolando il polinomio caratteristico si scopre che F_A ammette gli autovalori reali $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ con molteplicità algebrica rispettivamente 2 e 2. Si ha poi

$$V_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right. \}, \quad V_0 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right. \}.$$

Questi autospazi hanno entrambi dimensione 2. Per il criterio di diagonalizzabilità [1] ne segue che F_A è diagonalizzabile.
Passiamo a **3.2**: per quanto appena visto, la matrice associata ad F_A in una base di autovettori è uguale alla matrice diagonale

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Dato che

$$V_1 = \mathrm{Span}((1,0,0,1),(0,1,1,0)), \quad V_0 = \mathrm{Span}((1,0,0,-1),(0,1,-1,0)),$$

vediamo che una base di autovettori è data da

$$\underline{v}_1 = (1,0,0,1), \ \underline{v}_2 = (0,1,1,0), \ \underline{v}_3 = (1,0,0,-1), \ \underline{v}_4 = (0,1,-1,0)$$

Sia B la matrice che ha come colonne le coordinate degli autovettori nella base canonica:

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Sappiamo, dalla teoria, che

$$\Delta = B^{-1}AB$$

Dato che Δ è diagonale abbiamo risposto a **3.2**.
Consideriamo ora **3.3**: sappiamo che $\Delta = B^{-1}AB$ e ne segue quindi, moltiplicando a destra per B e a sinistra per B^{-1} che $A = B\Delta B^{-1}$ e quindi, in definitiva,

$$A^{1224} = (B\Delta B^{-1})^{1224} = B\Delta^{1223}B^{-1} = B\Delta B^{-1} = A$$

dove abbiamo ovviamente utilizzato ripetutamente il fatto che $BB^{-1} = B^{-1}B = I$ ed il fatto che, in questo caso particolare, $\Delta^k = \Delta \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Soluzione esercizio 4. Il polinomio caratteristico di F_A è $\lambda^2 + 2\lambda + 2$ che ha radici complesse coniugate $\lambda_1 = -1 + i$ e $\lambda_2 = -1 - i$. Dato che il polinomio caratteristico di F_A non ha radici reali ne segue che F_A non ammette autovalori ne segue che F_A non è diagonalizzabile. D'altra parte $F_A^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ è diagonalizzabile: infatti $F_A^{\mathbb{C}}$ ha ancora polinomio caratteristico $\lambda^2 + 2\lambda + 2$; quindi $F_A^{\mathbb{C}}$ ammette 2

[1] (i) radici del polinomio caratteristico reali; (ii) molteplicità algebrica=molteplicità geometrica.

autovalori *distinti* ed è quindi diagonalizzabile. La matrice diagonale associata a $F_A^{\mathbb{C}}$ è la matrice

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1+i & 0 \\ 0 & -1-i \end{vmatrix}$$

Notiamo che $V_{-1+1} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 - iz_2 = 0\} = \mathbb{C}(1, -i)$ e $V_{-1-i} = \mathbb{C}(1, i)$; concludiamo allora che una base di autovettori e data da

$$\underline{v}_1 = (1, -i)\,, \quad \underline{v}_2 = (1, i)\,.$$

Osservazione: si potrebbe pensare che data $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ ed $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ risulti che $F_A^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ sia sempre diagonalizzabile (dopo tutto essendo $\mathbb{C}$ algebricamente chiuso sappiamo che $F_A^{\mathbb{C}}$ ammette autovalori). Non è cosi' : ad esempio la matrice considerata nell'esercizio 1 (ii) è tale che né F_A, né $F_A^{\mathbb{C}}$ sono diagonalizzabili.

Soluzione esercizio 5. Abbiamo dimostrato a lezione che due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico; ciò implica, ovviamente, che se due matrici hanno polinomi caratteristici diversi, allora non sono simili. Ne segue, calcolando tali polinomi caratteristici, che le uniche matrici che *possono* essere simili sono A_2 e A_4. Si ha $P_{A_2}(\lambda) = P_{A_4}(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$ che ha radici *distinte* $\lambda_1 = 2\,,\ \lambda_2 = 3$. Quindi A_2 è simile alla matrice diagonale Δ con

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}\ ;$$

A_4 è anche simile alla matrice Δ e quindi A_2 è simile ad A_4, come volevasi.