Algebra Lineare. a.a. 2004-05. Gruppo A-H. Prof. P. Piazza
Soluzione esercizi su autovalori e autovettori

Esercizio 1. *Sia* $V = \mathbb{R}^3$ *con base canonica fissata. Consideriamo l'applicazione lineare* $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definita dalla matrice:*

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

1.1. *Determinare gli autovalori di* F_A.

Soluzione 1.1. Abbiamo visto che gli autovalori di F_A sono le radici del polinomio caratteristico $P_{F_A}(\lambda)$. La matrice associata a F_A nella base canonica è proprio A e quindi $P_{F_A}(\lambda) = P_A(\lambda)$ con

$$P_A(\lambda) = det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ -3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}.$$

Calcolando il determinante otteniamo: $P_A(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda)$. Ne segue che F_A ha autovalori $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2\,, \lambda_3 = 4$.

1.2. *Determinare equazioni cartesiane per gli autospazi associati.*

Soluzione 1.2. Vi ricordo che

$$V_\lambda = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,;\, F_A\underline{x} = \lambda\underline{x}\} \equiv \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,;\, A\underline{x} = \lambda\underline{x}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,;(A - \lambda \mathrm{I}_3)\underline{x} = \underline{0}\}\,.$$

Quindi $V_0 = \{\underline{x}\,;\, A\underline{x} = \underline{0}\} = \mathrm{Ker}F_A$; questo sottospazio sappiamo già calcolarlo ed otteniamo

$$V_0 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,; \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \}$$

Passiamo a V_2; la matrice $A - 2\mathrm{I}_3$ è data da

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

e quindi

$$V_2 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2\,; \begin{cases} -x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 \end{cases} \}$$

Procedendo analogamente si trova:

$$V_4 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\,; \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \}$$

1.3. *Per ogni autospazio determinare una base.*

Soluzione 1.3. In questo caso ogni autospazio è una retta (ognuno dei 3 sistemi è un sistema lineare omogeneo di 2 equazioni in 3 incognite e di rango 2). Risolvendo i sistemi si trova

$$V_0 = \mathbb{R}(0,-3,1)\,, \quad V_2 = \mathbb{R}(4,9,3)\,, \quad V_4 = \mathbb{R}(0,1,1)\,.$$

1.4. *Verificare che esiste una base di* $\mathbb{R}^3$ *costituita da autovettori per* F_A. *Determinare esplicitamente una tale base. Questa base è unica ?*

Soluzione 1.4. I vettori generatori dei 3 autospazi sono linearmente indipendenti; questo si può verificare direttamente calcolando, ad esempio, il determinante dell'opportuna matrice. Più intelligentemente però si può far uso della Proposizione che afferma che *autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti*; qui gli autovalori sono certamente distinti e possiamo concludere. Quindi *una* base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di F_A è

$$\underline{v}_1 = (0, -3, 1)\,, \quad \underline{v}_2 = (4, 9, 3)\,, \quad \underline{v}_3 = (0, 1, 1)$$

Questa base **non** è ovviamente unica; possiamo scegliere 3 generatori diversi nelle 3 rette di autovettori V_0, V_2, V_4 e ottenere così una diversa base di autovettori. Ad esempio

$$\underline{w}_1 = (0, 6, -2)\,, \quad \underline{w}_2 = (4\pi, 9\pi, 3\pi)\,, \quad \underline{w}_3 = (0, \sqrt{39}, \sqrt{39})\,.$$

1.5. *Scrivere la matrice associata a F_A nella base di cui in 1.4. (Utilizzate la definizione di matrice associata ad F_A in una base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$; vi ricordo che questa è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $F_A(\underline{v}_j)$ nella base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$.)*

Soluzione 1.5. Come spiegato in dettaglio a lezione la matrice associata ad F_A in una base di autovettori è proprio la matrice diagonale che ha sulla diagonale gli autovalori di F_A (nell'ordine dato dall'ordine degli autovettori). In questo caso, per la base

$$\underline{v}_1 = (0, -3, 1) \in V_0\,, \quad \underline{v}_2 = (4, 9, 3) \in V_2\,, \quad \underline{v}_3 = (0, 1, 1) \in V_4$$

otteniamo la matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

1.6 *Determinare una matrice invertibile M tale che $M^{-1}\,A\,M$ sia diagonale.*

Soluzione 1.6. Abbiamo a questo punto due basi di $\mathbb{R}^3$; la base canonica e la base di autovettori

$$\underline{v}_1 = (0, -3, 1)\,, \quad \underline{v}_2 = (4, 9, 3)\,, \quad \underline{v}_3 = (0, 1, 1)$$

Sia M la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $\underline{v}_j$ nella base canonica:

$$M = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -3 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}\,.$$

Questa è la matrice del cambiamento di base, dalla base canonica alla base di autovettori.

Sappiamo che la matrice B associata a F_A nella nuova base è data da

$$B = M^{-1}AM$$

D'altra parte abbiamo già calcolato questa matrice utilizzando l'informazione che la base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base di autovettori ed abbiamo trovato

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

In definitiva, la matrice M è tale che

$$M^{-1}AM = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

come si voleva.

Esercizio 2. *Rifare l'Esercizio 1 ma per l'operatore* $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definito dalla matrice*

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Soluzione Esercizio 2. Il polinomio caratteristico di F_A è $P_{F_A}(\lambda) \equiv P_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)$ che ha ovviamente radici $\lambda_1 = 1$ *contata due volte* o come si suole dire *con molteplicità algebrica 2* e $\lambda_2 = 1$. Gli autospazi sono

$$V_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,;\, x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$$

e

$$V_{-1} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,;\, \begin{cases} x_1 - 2\underline{x}_2 - \underline{x}_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \}$$

Quindi

$$V_1 = \mathrm{Span}((1,0,-1),(2,1,0)), \quad V_{-1} = \mathbb{R}(1,0,1).$$

Questi 3 vettori sono una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per F_A. La matrice associata a F_A nella base di autovettori è la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

La matrice M che ha come colonne le coordinate, nella base canonica, degli autovettori, e cioè la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ha la proprietà che

$$M^{-1}AM = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$