Algebra Lineare. a.a. 2004-05. Gruppo A-H. Prof. P. Piazza
Compito pomeridiano del 25/10/04

Esercizio 1. Scrivere la matrice $A \in M_{22}(\mathbb{R})$ che è combinazione lineare delle matrici

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad A_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

con pesi rispettivamente $2, 1, -3$.

Soluzione. La matrice combinazione lineare richiesta è

$$A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Esercizio 2. Stabilire se le matrici A_1, A_2, A_3 dell'esercizio precedente sono linearmente dipendenti.

Soluzione. Dobbiamo stabilire se l'equazione $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0$ ammetta o meno soluzioni non banali. La combinazione lineare $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3$ esplicitamente è

$$\alpha_1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 & 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{vmatrix}$$

pertanto l'equazione $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0$ diventa

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 & 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ovvero è equivalente al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

E' immediato osservare che questo sistema ammette al sola soluzione $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$, per cui le tre matrici A_1, A_2, A_3 sono linearmente indipendenti.

Esercizio 3. Vero o Falso :

- 4 vettori in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente dipendenti
- 6 vettori in $\mathbb{R}^4$ sono sempre linearmente dipendenti.
- 4 vettori in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente indipendenti

Giustificare le risposte.

Soluzione. La prima affermazione è falsa. Per dimostrarlo dobbiamo mostrare che in $\mathbb{R}^6$ è possibile trovare quattro vettori linearmente inipendenti. Un modo è il seguente: sappiamo che $\mathbb{R}^6$ ha dimensione 6. Una sua base $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4, \underline{b}_5, \underline{b}_6\}$ è costituita da 6 vettori linearmente indipendenti tra loro. Ma allora, in particolare i 4 vettori $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4\}$ sono linearmente indipendenti.

La seconda affermazione è vera. Se avessimo in $\mathbb{R}^4$ sei vettori linearmente indipendenti, allora la dimensione di $\mathbb{R}^4$ sarebbe almeno 6, ma sappiamo che la dimensione di $\mathbb{R}^4$ è uguale a 4.

Infine, l'ultima affermazione è falsa. Per fornire un controesempio basta prendere tre vettori a piacere in $\mathbb{R}^6$ e scegliere come quarto vettore una combinazione lineare dei primi tre. E' bene osservare che per produrre questo controesempio abbiamo dovuto scegliere il quarto vettore in modo particolare: in effetti quattro vettori "generici" di $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente indipendenti. Su cosa debba intendersi precisamente con "generici" torneremo più avanti nel corso. Per ora ci accontentiamo di dire (senza specificarne meglio il significato) che quattro vettori linearmente dipendenti in $\mathbb{R}^6$ costituiscono una situazione "speciale".

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}^3$. Quali dei seguenti sottoinsiemi di V è un sottospazio ? Giustificare le risposte.

$W_1 = \{(x, y, z) \in V \mid z = x^2 + y^2\}$.
$W_2 = \{t(1, 2, 2), 0 \leq t \leq 1\}$
$W_3 = \{(t, 0, 0), t \neq 0\}$
$W_4 =$ insieme delle soluzioni del sistema $\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$
$W_5 =$ insieme delle soluzioni del sistema $\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$
$W_6 = \{\underline{v} \in V \mid \underline{v} \neq (1, 0, 1)\}$

Soluzione. Il sottoinsieme W_1 non è un sottospazio di V. Ad esempio,[1] il vettore $(1, 1, 2)$ appartiene a W_1, ma il suo opposto, ovvero il vettore $(-1, -1, -2)$ non appartiene a W_1.

Il sottoinsieme W_2 non è un sottospazio di V. Ad esempio il vettore $(1, 2, 2)$ appartiene a W_2, ma il suo doppio $2 \cdot (1, 2, 2) = (2, 4, 4)$ non appartiene a W_2.

Il sottoinsieme W_3 non è un sottospazio di V. Ad esempio il vettore nullo $(0, 0, 0)$ non appartiene a W_3.

Il sottoinsieme W_4 è l'insieme delle soluzioni di un sistema non omogeneo. Come tale non è un sottospazio di V. Ad esempio il vettore nullo $(0, 0, 0)$ non appartiene a W_4.

Il sottoinsieme W_5 è l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo. Come tale è un sottospazio di V.

Infine, il sottoinsieme W_6 non è un sottospazio di V. Ad esempio, i vettori $(1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$ appartengono a W_6, ma la loro somma è il vettore $(1, 0, 1)$ che non appartiene a W_6.

Esercizio 5. Stabilire se l'insieme $\mathbb{R}^2$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ rispetto alle operazioni:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'), \qquad k(x, y) = (kx, -ky), \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

Soluzione. Le operazioni $\{+, \cdot\}$ definite nel testo dell'esercizio non dotano $\mathbb{R}^2$ di una struttura di spazio vettoriale. Forse il modo più semplice di vederlo (ce ne sono ovviamente infiniti altri) è osservare che $1 \cdot (x, y) = (x, -y)$ e dunque, in generale

$$1 \cdot (x, y) \neq (x, y)$$

[1] Se un sottoinsieme $W \subseteq V$ non è un sottospazio, ci sono in generale molti modi di dimostrarlo. Quelli proposti qui sono solamente degli esempi: ce ne sono infiniti altri altrettanto validi.

Non è dunque verificato l'assioma $1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$, $\forall \underline{v} \in V$.

Esercizio 6. Sia $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ lo spazio vettoriale che ha come insieme di vettori i numeri reali $\mathbb{R}$ e come campo di scalari i numeri razionali $\mathbb{Q}$. Le operazioni sono indotte dalle usuali operazioni sui reali. Dimostrare che $\dim \mathbb{R}_{\mathbb{Q}} \geq 2$. (Suggerimento: dimostrare che i vettori $\underline{v}_1 = 1$ e $\underline{v}_2 = \sqrt{2}$ sono linearmente indipendenti...).

Soluzione. Seguiamo il suggerimento e dimostriamo che i due numeri reali 1 e $\sqrt{2}$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{Q}$, ovvero che l'equazione $x \cdot 1 + y \cdot \sqrt{2} = 0$ con $x, y \in \mathbb{Q}$ ha solamente la soluzione banale $(x, y) = (0, 0)$. Analizziamo separatamente le due possibilità $y = 0$ e $y \neq 0$. Se $y = 0$, l'equazione $x + y\sqrt{2} = 0$ si riduce a $x = 0$ ovvero la soluzione è $(x, y) = (0, 0)$. Se invece $y \neq 0$, da $x + y\sqrt{2} = 0$ ricaviamo $\sqrt{2} = -x/y \in \mathbb{Q}$, ovvero che $\sqrt{2}$ è un numero razionale. Ma questo è assurdo e rimaniamo con la solita possibilità $y = 0$ e dunque con la sola soluzione $(x, y) = (0, 0)$. Abbiamo così provato che in $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ ci sono almeno due vettori linearmente indipendenti, il che implica $\dim \mathbb{R}_{\mathbb{Q}} \geq 2$. Si può poi dimostrare (ma non abbiamo gli strumenti per farlo) che in $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ ci sono infiniti vettori linearmente indipendenti: $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ è un esempio di spazio vettoriale di dimensione infinita.

Esercizio 7. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = (1, 0, 1, 0)\,,\ \underline{v}_2 = (0, 1, 0, 0)\,,\ \underline{v}_3 = (0, 0, 1, 0).$$

Si può verificare che questi 3 vettori sono linearmente indipendenti.
Determinare una base per i seguenti sottospazi:
$W_1 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 + 74\underline{v}_2 - \sqrt{2}\underline{v}_3)$
$W_2 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$
$W_3 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_1 + 2\underline{v}_2, \underline{v}_1 - 2\underline{v}_2)$

Soluzione. Verifichiamo che i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2\underline{v}_3$ sono linearmente dipendenti: l'equazione $\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_3\underline{v}_3 = 0$ scritta per esteso è

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

ed ha evidentemente la sola soluzione $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$. Determiniamo ora una base per i sottospazi W_1, W_2 e W_3. Osserviamo che tutti i generatori di W_1 sono combinazioni lineari di $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$, dunque $W_1 \leq \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$. D'altronde i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ appartengono a W_1 e dunque $\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) \leq W_1$. Ne segue $W_1 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$. Poiché i tre vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti, essi sono una base per il sotttospazio che generano, e dunque una base di W_1 è $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$. Con ragionamento perfettamente analogo si prova che $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è una base di W_2. Infine, per quanto riguarda W_3 osserviamo che tutti i generatori di W_3 sono sono combinazioni lineari di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ e dunque $W_3 \leq \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$. I due vettori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti e quindi sono una base per $\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ che pertanto ha dimensione 2. Questo ci dice che $\dim W_3 \leq 2$; pertanto in W_3 possiamo trovare al più 2 vettori linearmente indipendenti. Inoltre, se troviamo 2 vettori indipendenti in W_3 questi sono automaticamente una base di W_3, in quanto sono un sistema massimale di vettori indipendenti. Si verifica facilmente che $\underline{v}_1 + \underline{v}_2$ e $\underline{v}_1 - \underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti, per cui $\{\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 - \underline{v}_2\}$ è una base di W_3; In particolare W_3 ha dimensione 2. Osserviamo che W_3 viene ad essere un sottospazio bidimensionale di $\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$, che ha dimensione 2. Ne segue $W_3 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$. Questo fatto può essere dimostrato direttamente, mostrando che $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in W_3$. Infatti si ha

$$\begin{aligned} \underline{v}_1 &= \frac{1}{2}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \frac{1}{2}(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) \\ \underline{v}_2 &= \frac{1}{2}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) - \frac{1}{2}(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) \end{aligned}$$

Più avanti nel corso vedremo come estrarre una base da un sistema di generatori assegnato facendo uso del metodo di eliminazione di Gauss.