Algebra Lineare. a.a. 2004-05. Gruppo A-H. Prof. P. Piazza
Compito pomeridiano del 25/10/04
ESERCIZI PER CASA

Esercizio 1. Una matrice $A = (a_{ij}) \in M_{nn}(\mathbb{R})$ è detta *simmetrica* se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i, j. Una matrice A è detta *antisimmetrica* se $a_{ij} = -a_{ji}$ per ogni i, j.
1.1. Verificare che il sottoinsieme $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ delle matrici simmetriche è un sottospazio.
1.2. Verificare che il sottoinsieme $\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ delle matrici antisimmetriche è un sottospazio.
1.3 Nel caso $n = 3$ determinare una base del sottospazio $\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R})$ e una base del sottospazio $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$.

Soluzione. Siano A e B due matrici simmetriche e λ un numero reale. Dobbiamo mostrare che anche $A + B$ e λA sono matrici antisimmetriche. Si ha

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = a_{ji} + b_{ji} = (A + B)_{ji}$$
$$(\lambda A)_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} = \lambda \cdot a_{ji} = (\lambda A)_{ji}$$

dunque $A + B, \lambda A \in \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R})$.

La dimostrazione per lo spazio delle matrici antisimmetriche è perfettamente analoga: se A e B sono due matrici anti simmetriche e λ un numero reale, allora

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = -a_{ji} - b_{ji} = -(A + B)_{ji}$$
$$(\lambda A)_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} = -\lambda \cdot a_{ji} = -(\lambda A)_{ji}$$

dunque $A + B, \lambda A \in \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$.

Una base di $\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R})$ è data dalle 6 matrici

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Una base di di $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$ è invece data dalle 3 matrici

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

Notiamo che queste 9 matrici tutte insieme formano una base di $M_{33}(\mathbb{R})$. Questo riflette un fatto più generale: ogni matrice di $M_{nn}(\mathbb{R})$ si può scrivere in un unico modo come somma di una matrice simmetrica e di una matrice antisimmetrica (dimostrarlo). Per quanto riguarda le dimensioni, osserviamo che in generale vale $\dim \mathcal{S}_{nn} = n(n + 1)/2$ e $\dim \mathcal{A}_{nn} = n(n - 1)/2$.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a tre. Si consideri il sottoinsieme

$$W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(1) = 0\}$$

Stabilire se W è un sottospazio. Stesso esercizio per

$$U = \{q(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid q(2) = 4\}.$$

Soluzione. Il sottoinsieme W è un sottospazio di $\mathbb{R}_3[x]$. Infatti, presi $p(x), q(x)$ in W e $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha

$$(p+q)(1) = p(1) + q(1) = 0$$
$$(\lambda p)(1) = \lambda \cdot p(1) = 0$$

dunque $p(x) + q(x) \in W$ e $\lambda p(x) \in W$. Il sottoinsieme U, invece, non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_3[x]$. Ad esempio il polinomio zero non appartiane ad U.

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}[x]$ e sia $p(x) = 1 + x + x^2 + 5x^4$. Consideriamo $q(x) = x^2 + 5x^4$. Stabilire se $q(x) \in \mathrm{Span}(p)$.

Soluzione. Il polinomio $q(x)$ non appartiene a $\mathrm{Span}(p)$. Infatti se $q(\in \mathrm{Span}(p)$, si avrebbe $q(x) = \lambda p(x)$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$, ovvero

$$x^2 + 5x^4 = \lambda(1 + x + x^2 + 5x^4)$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$. Ma l'equazione scritta sopra è equivalente a

$$\lambda + \lambda x + (\lambda - 1)x^2 + 5(\lambda - 1)x^4 = 0$$

ovvero[1] al sistema

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 0 \\ \lambda - 1 = 0 \\ 5\lambda - 5 = 0 \end{cases}$$

che evidentemente non ha alcuna soluzione.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{C}_\mathbb{R}$ lo spazio vettoriale che ha come insieme di vettori i numeri complessi e come campo degli scalari i numeri reali. Verificare che la dimensione di $\mathbb{C}_\mathbb{R}$ è uguale a due. (Suggerimento: considerare i vettori 1 e i...).

Soluzione. Sappiamo che ogni numero complesso si può scrivere come $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Vale a dire $\{1, i\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{C}_\mathbb{R}$. Inoltre 1 ed i sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$ in quanto $x + iy = 0$ se e solo se $x = y = 0$. Dunque $\{1, i\}$ è un sistema di generatori indipendenti, ovvero una base. Avendo una base formata da due vettori, $\mathbb{C}_\mathbb{R}$ ha dimensione due.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale e $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ vettori linearmente indipendenti. Verificare che se $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$, $c_j \neq 0 \ \forall j$, allora i vettori

$$c_1\underline{v}_1, \dots, c_k\underline{v}_k$$

sono anche linearmente indipendenti.

Soluzione. Consideriamo l'equazione

$$\alpha_1(c_1\underline{v}_1) + \alpha_2(c_2\underline{v}_2) + \cdots + \alpha_k(c_k\underline{v}_k) = 0$$

La si può riscrivere come

$$(\alpha_1 c_1)\underline{v}_1 + (\alpha_2 c_2)\underline{v}_2) + \cdots + (\alpha_k c_k)\underline{v}_k = 0$$

Poiché i vettori $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ sono linearmente indipendenti, l'unica soluzione di quest'ultima equazione è

$$\alpha_1 c_1 = \alpha_2 c_2 = \cdots = \alpha_k c_k = 0$$

[1] Quella scritta sopra è un'identità di polinomi e non un'equazione nella variabile x. Stiamo cioè chiedendo che il polinomio $\lambda + \lambda x + (\lambda - 1)x^2 + 5(\lambda - 1)x^4$ sia *identicamente* nullo, e non quali siano i valori di x che lo annullano.

Ma $c_1, \dots, c_k \neq 0$ e dunque deve essere

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0,$$

ovvero, i vettori $c_1\underline{v}_1, \dots, c_k\underline{v}_k$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio 6. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Verificare che questi 3 vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$. Determinare le coordinate del vettore $\underline{e}_2 = (0, 1, 0)$ in questa nuova base di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione. Si tratta di 3 vettori in $\mathbb{R}^3$. per mostrare che sono una base basta mostrare che sono linearmente indipendenti. L'equazione

$$\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_3\underline{v}_3 = 0$$

è equivalemte al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

La matrice associata al sistema è

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Osserviamo che avremmo potuto scrivere la matrice del sistema direttamente dai vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$. Applichiamo l'algoritmo di eliminazione gaussiana alla matrice del sistema:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right|$$

$$\mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 0 \end{array}\right|$$

Tutti i pivot sono diversi da zero. la matrice del sistema è pertanto non singolare, ed il sistema ammette un unica soluzione. Trattandosi di un sistema omogeneo, quest'unica soluzione deve essere la soluzione banale.

Determinare le coordinate del vettore $\underline{e}_2$ nella base $\underline{v}_1, \underline{v}_2\underline{v}_3$ significa determinare i tre numeri reali $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ per i quali risulta

$$\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_3\underline{v}_3 = \underline{e}_2$$

Arriviamo cosi al sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 1 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

La matrice associata al sistema è

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Osserviamo che anche in questo caso avremmo potuto scrivere la matrice del sistema direttamente dai vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ ed $\underline{e}_2$. Applicando l'algoritmo di eliminazione gaussiana alla matrice del sistema troviamo:

$$\left|\begin{matrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{matrix}\right|\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}\right| \mapsto \left|\begin{matrix}1 & 3 & -1\\ 0 & -5 & 1\\ 0 & -7 & 2\end{matrix}\right|\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}\right| \mapsto \left|\begin{matrix}1 & 3 & -1\\ 0 & 1 & -1/5\\ 0 & -7 & 2\end{matrix}\right|\begin{matrix}0\\-1/5\\0\end{matrix}\right|$$

$$\mapsto \left|\begin{matrix}1 & 3 & -1\\ 0 & 1 & -1/5\\ 0 & 0 & 3/5\end{matrix}\right|\begin{matrix}0\\-1/5\\-7/5\end{matrix}\right| \mapsto \left|\begin{matrix}1 & 3 & -1\\ 0 & 1 & -1/5\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix}0\\-1/5\\-7/3\end{matrix}\right|$$

$$\mapsto \left|\begin{matrix}1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix}-7/3\\-2/3\\-7/3\end{matrix}\right| \mapsto \left|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix}-1/3\\-2/3\\-7/3\end{matrix}\right|$$

Le coordinate di $\underline{e}_2$ nella base $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \underline{v}_3$ sono pertanto $(-1/3, -2/3, -7/3)$; vale a dire

$$\underline{e}_2 = -\frac{1}{3}\underline{v}_1 - \frac{2}{3}\underline{v}_2 - \frac{7}{3}\underline{v}_3$$