ISTITUZIONI DI MATEMATICHE
Corso di Laurea in Scienze Ambientali - A.A.2003-2004

Soluzione dei compiti per il periodo 23/10/03 - 28/10/03

Esercizio 1. *Sia $a \neq 1$. Calcolare*

$$\log_a(1)\,, \quad \log_a(a)\,, \quad \log_a(a^2)\,, \quad \log_a(\sqrt{a})\,.$$

Soluzione. Ricordiamo che $\log_a(x)$ è l'esponente che bisogna dare ad a per ottenere x. Dato che vale sempre $a^0 = 1$ concludiamo che $\log_a(1) = 0$. Analogamente, dato che $a^1 = a$ concludiamo che $\log_a(a) = 1$. Infine $\log_a(a^2) = 2$ dato che 2 è l'esponente che occorre dare ad a per ottenere a^2. È anche chiaro a questo punto che $\log_a(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}$.

Esercizio 2. *Scrivere un' uguaglianza che colleghi tra loro le seguenti quantità :*

$$\log_{10}(\frac{54}{11})\,, \quad \log_{10}(2)\,, \quad \log_{10}(3)\,, \quad \log_{10}(11).$$

Soluzione. Ricordiamo che $\forall a \neq 1$

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)\,, \quad \log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)\,, \quad \log_a(x^b) = b\log_a(x)\,.$$

Scriviamo $54 = 2 \cdot 3^3$. Ma allora

$$\log_{10}(\frac{54}{11}) = \log_{10}(54) - \log_{10}(11) = \log_{10}(2 \cdot 3^3) - \log_{10}(11) = \log_{10}(2) + 3\log_{10}(3) - \log_{10}(11).$$

Conclusione: $\log_{10}(\frac{54}{11}) = \log_{10}(2) + 3\log_{10}(3) - \log_{10}(11)$.

Esercizio 3. *Calcolare*

$$\log_2(\frac{1}{16})\,, \quad 2^{\log_2(512)}\,, \quad \log_{\sqrt{2}}(\sqrt[5]{\frac{1}{2}})$$

Soluzione. Dato che $\frac{1}{16} = 2^{-4}$ si ha, chiaramente, $\log_2(\frac{1}{16}) = -4$; infatti -4 è l'esponente che occorre dare a 2 per ottenere $\frac{1}{16}$. Dato che per la definizione stessa di logaritmo si ha

$$\forall x \in (0, \infty) \quad a^{\log_a(x)} = x$$

è chiaro che $2^{\log_2(512)} = 512$.
Per calcolare

$$\log_{\sqrt{2}}(\sqrt[5]{\frac{1}{2}})$$

osserviamo preliminarmente che

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}\,, \quad \sqrt[5]{\frac{1}{2}} = ((2^{-1}))^{\frac{1}{5}} = 2^{-\frac{1}{5}}$$

Ci domandiamo qual è l'esponente che bisogna dare a $2^{\frac{1}{2}}$ per ottenere $2^{-\frac{1}{5}}$; tale esponente è $-\frac{2}{5}$. Infatti

$$(2^{\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{5}} = 2^{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{2}{5})} = 2^{-\frac{1}{5}}\,.$$

Esercizio 4. *Determinare* $x \in (0, +\infty)$ *tale che* $\log_4(x) = 2$. *Ripetere l'esercizio per* $\log_7(x) = -2$.
Soluzione. Basta applicare la definizione: $\log_4(x)$ è l'esponente che occorre dare a 4 per ottenere x: quindi $4^{\log_4(x)} = x$; ma ci viene data l'informazione che $\log_4(x) = 2$ e concludiamo allora che $x = 4^2 = 16$. Analogamente: $7^{\log_7(x)} = x$ e dato che ci viene data l'informazione che $\log_7(x) = -2$ concludiamo che $x = 7^{-2} = 1/7^2 = 1/49$.

Esercizio 5. *A cosa è uguale* $\pi^3\, \pi^{\frac{1}{3}}$ *? Possibile risposte (scegliere quella giusta):*

$$0\,, \quad 1\,, \quad \pi\,, \quad \frac{1}{\pi}\,, \quad \sqrt[3]{\pi^{10}}\,, \quad \sqrt[10]{\pi^3}\,.$$

Soluzione. Abbiamo già utilizzato le regole

$$x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}\,, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

In questo caso

$$\pi^3\, \pi^{\frac{1}{3}} = \pi^{3+\frac{1}{3}} = \pi^{\frac{10}{3}} = \sqrt[3]{\pi^{10}}\,.$$

Esercizio 6. *Disegnare nel piano cartesiano i vettori di coordinate* $(1, 1)$ *e* $(2, -2)$. *Disegnare l'opposto di* $(2, -2)$. *Calcolare la lunghezza di questi due vettori. Verificare usando la formula in coordinate che sono ortogonali. Stabilire se i vettori* $(2, -1)$ *e* $(2, 2)$ *sono paralleli.*
Soluzione. La lunghezza di un vettore $\underline{v} = (x, y)$ si denota con $\|\underline{v}\|$ ed è data da $\sqrt{x^2 + y^2}$. Quindi

$$\|(1, 1)\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}\,, \quad \|(2, -2)\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\,.$$

Inoltre

$$(1, 1) \cdot (2, -2) = 2 - 2 = 0$$

e quindi $(1, 1) \perp (2, -2)$. I vettori $(2, -1)$ e $(2, 2)$ non sono paralleli, infatti non esiste alcun $\alpha \neq 0$ tale che $2 = \alpha 2$ e $(-1) = \alpha 2$.

Esercizio 7. *Determinare quei* $t \in \mathbb{R}$ *tali che i vettori*

$$\underline{v} = (t, 1, -1)\,, \quad \underline{w} = (t, 0, 1)$$

siano ortogonali.
Soluzione. $\underline{v} \perp \underline{w} \Leftrightarrow \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$. Quindi cerchiamo $t \in \mathbb{R}$ tale che

$$(t, 1, -1) \cdot (t, 0, 1) = 0$$

Utlizzando la formula per il prodotto scalare otteniamo

$$(t, 1, -1) \cdot (t, 0, 1) = t^2 - 1$$

e quindi dobbiamo risolvere l'equazione $t^2 - 1 = 0$ che ha soluzioni $t_1 = 1$ e $t_2 = -1$.