Algebra Lineare. a.a. 2004-05. Gruppo A-H. Prof. P. Piazza
Compito pomeridiano del 22/11/04

Esercizio 1. Determinare l'intersezione dei seguenti due sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}\right), \quad W = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{vmatrix}\right)$$

Soluzione. Iniziamo con l'osservare che U è generato da due vettori in $\mathbb{R}^3$. Genericamente due vettori in $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti, per cui la dimensione attesa di U è due. Con ragionamento analogo la dimensione attesa di W è anch'essa due. La somma $U+W$ è generata da quattro vettori di $\mathbb{R}^3$. Genericamente, quattro vettori di $\mathbb{R}^3$ generano tutto $\mathbb{R}^3$, per cui la dimensione attesa per $U+W$ è 3. Ne segue che la dimensione attesa per l'intersezione $U \cap W$ è $2+2-3=1$. Ovvero prima ancora di fare alcun calcolo quel che ci aspettiamo è che l'intersezione di U e W sia un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione uno. E' possibile che questa aspettativa venga smentita dai calcoli; se questo accase significa che i dati del problema non sono affatto generici, bensì molto particolari. Passiamo ora a determinare effettivamente l'intersezione tra U e W. Per prima cosa estraiamo delle basi dai sistemi di generatori proposti, utilizzando l'algoritmo di Gauss. Per il sottospazio U si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Si tratta di una matrice di rango due, per cui i generatori di U costituiscono effettivamente una base e $\dim U = 2$ come atteso. Continuando con l'eliminazione gaussiana possiamo determinare una base di U con un maggior numero di zeri, e dunque più comoda per i calcoli:

$$\to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

ovvero

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}\right) = \mathrm{Span}\left(\underline{e}_1, \underline{e}_2\right)$$

Procedendo in modo perfettamente analogo per W troviamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

da cui

$$W = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{vmatrix}\right) = \mathrm{Span}\left(\underline{f}_1, \underline{f}_2\right)$$

e $\dim W = 2$ come atteso. Per determinare l'intersezione $U \cap W$, osserviamo che un vettore $\underline{v} \in U \cap W$ è un vettore di U e dunque si scrive $\underline{v} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2$ ma è anche un vettore di W per cui si scrive $\underline{v} = y_1 \underline{f}_1 + y_2 \underline{f}_2$. Otteniamo cosi il sistema

$$\begin{cases} \underline{v} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 \\ \underline{v} = y_1 \underline{f}_1 + y_2 \underline{f}_2 \end{cases}$$

che è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \underline{v} = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 \\ x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 - y_1\underline{f}_1 - y_2\underline{f}_2 = 0 \end{cases}$$

La prima equazione di quest'ultimo sistema può essere letta come una formula per $\underline{v}$ in termini di $x_1, x_2, \underline{e}_1, \underline{e}_2$, mentre la seconda equazione è un sistema lineare omogeneo nelle variabili x_1, x_2, y_1, y_2. Risolvendo questo sistema omogeneo, estraendo x_1, x_2 dalla soluzione e sostituendo nella formula $\underline{v} = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2$ troviamo esplicitamente i vettori $\underline{v}$ dell'intersezione. La matrice associata al sistema, rispetto alle variabili $x_1, x_2, -y_1, -y_2$ è

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right|$$

Risolviamo questo sistema con il solito algoritmo di Gauss:

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right| \to \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right| \to \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right|$$

$$\to \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right|$$

Ritraducendo questa matrice in un sistema (ricordando che le variabili sono, nell'ordine $x_1, x_2, -y_1, -y_2$) troviamo

$$\begin{cases} x_1 - y_2 = 0 \\ x_2 - 5y_2 = 0 \\ -y_1 + y_2 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 5t \\ y_1 = t \\ y_2 = t \end{cases}$$

In particolare $(x_1, x_2) = (t, t)$ per cui

$$\underline{v} = t\underline{e}_1 + t\underline{e}_2 = t(\underline{e}_1 + \underline{e}_2) = t\left|\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right|$$

e dunque

$$U \cap W = \mathrm{Span}\left(\left|\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right|\right)$$

e $\dim U \cap W = 1$ come atteso.

Esercizio 2. Determinare l'intersezione dei seguenti tre sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \mathrm{Span}\left(\left|\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right|, \left|\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right|, \left|\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{array}\right|\right), \quad V = \mathrm{Span}\left(\left|\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{array}\right|, \left|\begin{array}{c} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 5 \end{array}\right|, \left|\begin{array}{c} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{array}\right|\right)$$

$$W = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right)$$

Soluzione. Ragionando in modo perfettamente analogo a quanto fatto per l'esercizio precedente si vede che U, V e W hanno dimensione attesa uguale a tre, $U \cap V$ ha dimensione attesa due e $(U \cap V) + W$ ha dimensione attesa quattro. Per cui la formula di Grassmann ci dice che la dimensione attesa per l'intersezione $U \cap V \cap W$ è $2+3-4=1$. Per determinare esplicitamente l'intersezione $U \cap V \cap W$ cominciamo con l'estrarre delle basi "comode" dai sistemi di generatori dati:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

dunque

$$U = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right) = \text{Span}\left(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\right)$$

Mediante eliminazione gaussiana sui generatori di V otteniamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\to \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ovvero

$$V = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right) = \text{Span}\left(\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3\right)$$

Infine il sistema di generatori dato per W è già ridotto:

$$W = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right) = \text{Span}\left(\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\right)$$

Procedendo come nell'esercizio precedente, determinare un vettore $\underline{v} \in U \cap V \cap W$ porta al sistema

$$\begin{cases} \underline{v} = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3 \\ \underline{v} = y_1\underline{f}_1 + y_2\underline{f}_2 + y_3\underline{f}_3 \\ \underline{v} = z_1\underline{g}_1 + z_2\underline{g}_2 + z_3\underline{g}_3 \end{cases}$$

ovvero al sistema

$$\begin{cases} \underline{v} = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3 \\ x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3 - y_1\underline{f}_1 - y_2\underline{f}_2 - y_3\underline{f}_3 = 0 \\ x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3 - z_1\underline{g}_1 - z_2\underline{g}_2 - z_3\underline{g}_3 = 0 \end{cases}$$

e di nuovo la prima equazione può essere letta come una formula per $\underline{v}$ mentre le altre due equazioni sono un sistema lineare omogeneo. La matrice associata a questo sistema omogeneo, nelle variabili $x_1, x_2, x_3, -y_1, -y_2, -y_3, -z_1, -z_2, -z_3$ è

$$\left|\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

Possiamo risolvere questo sistema mediante il solito algoritmo di Gauss:

$$\to \left|\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

$$\to \left|\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

$$\to \left|\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

$$\to \left|\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

$$\to \left|\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right|$$

$$\to \left|\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

$$\to \left|\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Ritraducendo questa matrice in un sistema lineare (e ricordando che le variabili sono, nell'ordine, $x_1, x_2, x_3, -y_1, -y_2, -y_3, -z_1, -z_2, -z_3$) troviamo

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 - z_3 = 0 \\ -y_1 = 0 \\ -y_2 = 0 \\ -y_3 + z_3 = 0 \\ -z_1 = 0 \\ -z_2 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \\ y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = t \\ z_1 = 0 \\ z_2 = 0 \\ z_3 = t \end{cases}$$

In particolare $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, t)$ da cui

$$\underline{v} = t\underline{e}_3 = t \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right|$$

e dunque

$$U \cap V \cap W = \text{Span}\left(\left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right| \right)$$

e l'intersezione di U, V e W ha dimensione uno, come atteso.

Esercizio 3. Dimostrare che, dati tre sottospazi U, V, W di $\mathbb{R}^n$, si ha

$$(U \cap V) + (U \cap W) \subseteq U \cap (V + W)$$

e mostrare con un esempio che in generale l'inclusione è stretta, ovvero che in generale si ha

$$(U \cap V) + (U \cap W) \neq U \cap (V + W).$$

Soluzione. Sia $\underline{v} \in (U \cap V) + (U \cap W)$ allora $\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$ con $\underline{v}_1 \in U \cap V$ e $\underline{v}_2 \in U \cap W$. Poiché $\underline{v}_1 \in U \cap V$, in particolare $\underline{v}_1 \in U$; analogamente $\underline{v}_2 \in U$, e dunque $\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in U$. D'altra parte $\underline{v}_1 \in U \cap V$ implica $\underline{v}_1 \in V$; allo stesso modo $\underline{v}_2 \in U \cap W$ implica $\underline{v}_2 \in W$. Dunque $\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in V + W$. Pertanto $\underline{v} \in U$ e $\underline{v} \in V + W$, ovvero $\underline{v} \in U \cap (V + W)$. Abbiamo così dimostrato che ogni elmento di $(U \cap V) + (U \cap W)$ giace in $U \cap (V + W)$, ovvero $(U \cap V) + (U \cap W) \subseteq U \cap (V + W)$. Per dimostrare che in generale l'inclusione è stretta basta considerare i seguenti tre sottospazi di $\mathbb{R}^2$:

$$U = \text{Span}\left(\left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right| \right), \quad V = \text{Span}\left(\left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right| \right), \quad W = \text{Span}\left(\left| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right| \right)$$

Si ha, evidentemente $U \cap V = U \cap W = \{0\}$ e dunque $(U \cap V) + (U \cap W) = \{0\}$, ma $V + W = \mathbb{R}^2$ e dunque $U \cap (V + W) = U \cap \mathbb{R}^2 = U$.