Algebra Lineare. a.a. 2004-05. Gruppo A-H. Prof. P. Piazza
Soluzioni compito pomeridiano del 20/12/2004

Esercizio 1. Consideriamo una retta r dello spazio affine. Diremo che le equazioni cartesiane di r sono in forma ridotta se sono del tipo

$$\begin{cases} x = lz + p \\ y = mz + q \end{cases}, \text{ oppure } \begin{cases} x = ly + p \\ z = ny + q \end{cases}, \text{ oppure } \begin{cases} y = mx + p \\ z = nx + q \end{cases}$$

Spiegare perché è sempre possibile trovare equazioni ridotte per una retta. Determinare equazioni ridotte per la retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 2x - 2y - 3z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

Osservazione. Consideriamo la retta di equazione ridotta

$$\begin{cases} x = lz + p \\ y = mz + q \end{cases}$$

È ovvio come passare ad equazione parametriche (basta porre $t = z$); è anche ovvio che i parametri direttori di r sono $(l, m, 1)$. In particolare, per una tale retta $n \neq 0$ e quindi tale retta non è mai parallela al piano coordinato xy, che ha equazione $z = 0$ [1] Concludiamo che al variare di l, m, p, q le equazioni

$$\begin{cases} x = lz + p \\ y = mz + q \end{cases}$$

rappresentano tutte le rette dello spazio ad eccezione di quelle parallele al piano coordinato xy. Un'osservazione simile vale per gli altri tipi di equazioni ridotte. Queste osservazioni sono a volte utili negli esercizi.

Soluzione. Le equazioni di una retta nello spazio affine sono della forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

Poichè le soluzioni di questo sistema descrivono i punti di una retta, lo spazio delle soluzioni deve avere dimensione 1 e dunque, per il teorema di Rouché-Capelli, la matrice dei coefficienti deve avere rango 2. Ma allora una delle colonne della matrice dei coefficienti dipende lineramente dalle altre due. Portando la colonna dipendende alla destra dell'uguale (dunque trattando la variabile corrispondente come un parametro) e risolvendo il sistema si arriva ad equazioni cartesiane ridotte per r. Vediamo in pratica cosa accade con l'esempio proposto dall'esercizio. Applicando il metodo di eliminazione di Gauss, otteniamo

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3/2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 5/2 & 0 \end{array}\right|$$

$$\mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

[1] Vi ricordo che una retta di parametri direttori (l, m, n) è parallela ad un piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ se $al + bm + cn = 0$.

I pivot sono sulla prima e terza colonna. Portando la seconda colonna a destra dell'uguale troviamo il sistema

$$\begin{cases} x = y + 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

che fornisce equazioni cartesiane ridotte per la retta data.

Esercizio 2. Si verifichi che esiste un solo piano contenente i tre punti

$$P_1 = (1, 2, 0), \quad P_2 = (1, 1, 1), \quad P_3 = (2, -1, -3).$$

e se ne dia un'equazione cartesiana.

Soluzione. Per tre punti non-allineati passa uno ed un solo piano. Per verificare che i tre punti sono non-allineati basta verificare che i vettori $\underline{v} = P_2 - P_1$ e $\underline{w} = P_3 - P_1$ non sono linearmente dipendenti. Abbiamo $\underline{v} = (0, -1, 1)$ e $\underline{w} = (1, -3, -3)$, ed è immediato osservare che $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono lineramente indipendenti. Per scrivere un equazione cartesiana del piano π contenente P_1, P_2 e P_3, basta ricordare che le equazioni parametriche sono

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= P_1 + t(P_2 - P_1) + s(P_3 - P_1) \\ &= P_1 + t\underline{v} + s\underline{w} \end{aligned}$$

e dunque $(x, y, z)\pi$ se e solo se $(x, y, z) - P_1$ è linearmente dipendente da $\underline{v}$ e $\underline{w}$, ovvero se e solo se

$$\det \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ y-2 & -1 & -3 \\ z & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando il determnante si trova l'equazione

$$6x + y + z - 8 = 0\,.$$

Esercizio 3. Determinare l'equazione del piano per $Q_0 = (1, 2, -1)$ e parallelo alle rette r ed s di equazioni

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 3z = 1 \end{cases} , \qquad \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

Soluzione. I vettori direttori delle 2 rette sono 2 vettori di giacitura per il piano; abbiamo quindi un punto e due vettori di giacitura. A questo punto si procede in modo identico all'esercizio precedente: le equazioni cartesiane del piano sono

$$(x, y, z) = Q_0 + t\underline{v} + s\underline{w}$$

con $\underline{v}$ e $\underline{w}$ vettori direttori delle du rette date, ovvero $\underline{v} = (-3, 4, 1)$ e $\underline{w} = (1, 1, 4)$. Un'equazione cartesiana del piano cercato è dunque

$$\det \begin{vmatrix} x-1 & -3 & 1 \\ y-2 & 4 & 1 \\ z+1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

ovvero

$$15x + 13y - 7z - 48 = 0.$$

Nei tre esercizi che seguono può essere utile tenere a mente che le rette cercate possono essere espresse come intersezione di opportuni piani.

Esercizio 3bis. Determinare equazioni cartesiane per la retta passante per $Q = (-1,-1,-1)$, contenuta nel piano π di equazione $x+y+z+3=0$ e complanare alla retta s di equazioni

$$\begin{cases} x-2z+4=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$$

Soluzione. La retta cercata è l'intersezione del piano π e del piano per Q e s. Quest'ultimo piano si ottiene con il metodo del fascio; mettendo poi a sistema con l'equazione cartesiana di π si ottengono le equazioni della retta cercata. Esplicitamente, il facio di piani contenenti la retta s è

$$\lambda(x-2z+4)+\mu(2y-z)=0, \qquad (\lambda,\mu)\neq(0,0)$$

Imponendo il passaggio per Q otteniamo l'equazione

$$5\lambda-\mu=0$$

e possimao prendere $(\lambda,\mu)=(1,5)$. Ogni altra soluzione differisce da questa solo per un fattore scalare, dunque tutte le soluzioni corrispondono allo stesso piano in $\mathbb{R}^3$. L'equazione che otteniamo con la scelta $(\lambda,\mu)=(1,5)$ è

$$x+10y-7z+4=0$$

La retta cercata ha dunque equazioni

$$\begin{cases} x+y+z+3=0 \\ x+10y-7z+4=0 \end{cases}$$

Esercizio 4. Determinare le equazioni cartesiane della retta r passante per $(4,1,0)$ e complanare alle rette s e t di equazioni rispettivamente

$$\begin{cases} x+2z-1=0 \\ y-z-3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-z-2=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

Soluzione. La retta si ottiene come intersezione di due piani σ e σ', dove σ è il piano per s e $(4,1,0)$ e σ' è il piano per t e per $(4,1,0)$. Questi due piani si ottengono con il metodo del fascio; mettendo a sistema le due equazioni ottenute si ottengono le equazioni cartesiane della retta cercata. Esplicitamente, il fascio di piani per s è

$$\lambda(x+2z-1)+\mu(y-z-3)=0$$

Imponendo il passaggio per $(4,1,0)$ troviamo $3\lambda-2\mu=0$ e possiamo prendere $(\lambda,\mu)=(2,3)$. Otteniamo così

$$\sigma : 2x+3y+z-11=0$$

Il facio di piani per t è

$$\lambda(x-z-2)+\mu(y+z)=0$$

Imponendo il passaggio per $(4,1,0)$ troviamo $2\lambda+\mu=0$ e possiamo prendere $(\lambda,\mu)=(1,-2)$. Otteniamo così

$$\sigma : x-2y-3z-2=0$$

La retta cercata ha dunque equazione

$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 11 = 0 \\ x - 2y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 5. Determinare la retta r per il punto $Q_0 = (1, -1, -1)$ e complanare alle rette s ed t di equazione

$$\begin{cases} 2x + 2y + 1 = 0 \\ -2x + 3y + z = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Soluzione. E' un esercizo concettualmente identico al precedente. Il fascio di piani per s è

$$\lambda(2x + 2y + 1) + \mu(-2x + 3y + z) = 0$$

Imponendo il passaggio per $(1, -1, -1)$ troviamo $\lambda - 6\mu = 0$ e possiamo prendere $(\lambda, \mu) = (6, 1)$. Otteniamo così

$$\sigma : 10x + 15y + z + 6 = 0$$

Il facio di piani per t è

$$\lambda(y - 2) + \mu(z - 1) = 0$$

Imponendo il passaggio per $(1, -1, -1)$ troviamo $-3\lambda - 2\mu = 0$ e possiamo prendere $(\lambda, \mu) = (2, -3)$. Otteniamo così

$$\sigma : 2y - 3z - 1 = 0$$

La retta cercata ha dunque equazione

$$\begin{cases} 10x + 15y + z + 6 = 0 \\ 2y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

Complementi ed esercizi ulteriori.

Sono date due rette r e ρ dello spazio affine $\mathcal{A}^3$ di equazione rispettivamente

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0 \end{cases}.$$

Esercizio 6. Dimostrare che r e ρ sono *complanari* se e soltanto se la matrice

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$$

ha determinante uguale a zero.

Soluzione. Il determinante della matrice

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$$

è uguale a zero se e solo le righe della matrice sono linearmente dipendenti, ovvero se e solo se esistono quattro costanti non tutte nulle l, l', λ, λ' tali che

$$l(a, b, c, d) + l'(a', b', c', d') = \lambda(\alpha, \beta, \gamma, \delta) + \lambda'(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$$

Utilizzando l'isomorfismo di spazi vettoriali di dimensione 4

$$ax + by + cz + d \leftrightarrow (a, b, c, d)$$

otteniamo che il determinante della matrice dei coefficienti delle rette date si annulla se e solo se esistono quattro costanti non tutte nulle l, l', λ, λ' tali che il polinomio

$$\ell(ax + by + cz + d) + \ell'(a'x + b'y + c'z + d')$$

coincida con il polinomio

$$\lambda(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) + \lambda'(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta')$$

Osserviamo che deve essere $(l, l') \neq (0, 0)$. Infatti se $(l, l') = (0, 0)$ allora il primo polinomio è identicamente nullo, e dunque deve essere identicamente nullo anche il secondo. Ma i due polinomi $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$ e $a'x + b'y + c'z + d'$ sono linearmente indipendenti perché i loro zeri comuni insieme descrivono una retta (se fossero linearmente dipendenti i loro zeri comuni descriverebbero un piano). Ne segue che deve essere anche $\lambda, \lambda') = (0, 0)$. Ma allora $(l, l', \lambda, \lambda') = (0, 0, 0, 0)$ contro l'ipotesi. Con analogo ragionamento si vede che non può essere $(\lambda, \lambda') = (0, 0)$. In conclusione, sia l'equazione

$$\ell(ax + by + cz + d) + \ell'(a'x + b'y + c'z + d') = 0$$

che l'equazione

$$\lambda(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) + \lambda'(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta') = 0$$

rappresentano dei piani in $\mathbb{R}^3$. E poiché si tratta in realta della stessa equazione, queste due equazioni descrivono *uno stesso piano* π *di* $\mathbb{R}^3$. Dalla prima equazione si vede che π contiene la retta r, mentre dalla seconda si vede che contiene la retta ρ. Le due rette risultano pertanto complanari. Viceversa se r e ρ sono complanari allora esiste π che le contiene entrambe. Poiché π contiene r, l'equazione di π è

$$\ell(ax + by + cz + d) + \ell'(a'x + b'y + c'z + d') = 0$$

per qualche $(l, l') \neq (0, 0)$. Ma π contiene anche ρ e dunque la sua equazione è

$$\lambda(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) + \lambda'(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta') = 0$$

per qualche $(\lambda, \lambda') \neq (0, 0)$. Ne segue che esistono quattro costanti non tutte nulle l, l', λ, λ' tali che il polinomio

$$\ell(ax + by + cz + d) + \ell'(a'x + b'y + c'z + d')$$

coincida con il polinomio

$$\lambda(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) + \lambda'(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta')$$

e dunque i quattro vettori $(a, b, c, d), (a', b', c', d'), (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ e $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ sono linearmente dipendenti.

Esercizio 7. Utilizzando le vostre conoscenze sui sistemi lineari, dimostrate che se r e ρ sono complanari allora

$$r = \rho, \qquad r \cap \rho = P, \qquad r // \rho$$

a seconda che si abbia rispettivamente

$$rg \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = rg \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 2 \, ,$$

$$rg\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = rg\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 3\ ,$$

$$rg\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = 3; \qquad rg\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 2.$$

Soluzione. Il risultato dell'esercizio precedente ci dice che

$$rg\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} \leq 3$$

perché le due rette sono complanari per ipotesi. Inoltre dal fatto che le equazioni

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

descrivano una retta segue che

$$rg\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 2.$$

Dunque

$$2 \leq rg\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} \leq rg\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} \leq 3$$

E possono presentarsi solo i tre casi presi in considerazione nel testo dell'esercizio. A questo punto si conclude con Rouché-Capelli.

Esercizio 8. Verificare che se r e ρ sono date in forma ridotta

$$\begin{cases} x = lz + p \\ y = mz + q \end{cases} \qquad \begin{cases} x = l'z + p' \\ y = m'z + q' \end{cases}$$

allora r è complanare a ρ sse la matrice

$$\begin{vmatrix} l - l' & p - p' \\ m - m' & q - q' \end{vmatrix}$$

ha determinante uguale a zero.

Soluzione. Basta utilizzare la condizione di complanarità fornita dall'esercizio 6: le rette r e ρ sono complanari sse

$$\det\begin{vmatrix} 1 & 0 & -l & -p \\ 0 & 1 & -m & -q \\ 1 & 0 & -l' & -p' \\ 0 & 1 & -m' & -q' \end{vmatrix} = 0.$$

Per calcolare il determinante basta utilizzre la riduzione di Gauss e poi sviluppare mediante Laplace:

$$\det\begin{vmatrix} 1 & 0 & -l & -p \\ 0 & 1 & -m & -q \\ 1 & 0 & -l' & -p' \\ 0 & 1 & -m' & -q' \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} 1 & 0 & -l & -p \\ 0 & 1 & -m & -q \\ 0 & 0 & l-l' & p-p' \\ 0 & 0 & m-m' & q-q' \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} l-l' & p-p' \\ m-m' & q-q' \end{vmatrix}$$

Esercizio 9. Determinare le equazioni cartesiane della retta $\widetilde{r}$ parallela alla retta r di equazioni

$$\begin{cases} x-2y-1=0 \\ y-z+2=0 \end{cases}$$

e complanare alle rette s e t di equazioni rispettivamente

$$\begin{cases} x+2z-1=0 \\ y-z-3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-z-2=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

Suggerimento: utilizzare il risultato dell'esercizio precedente.

Soluzione. Essendo parallela ad r, la retta $\widetilde{r}$ ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x-2y=p \\ y-z=q \end{cases}$$

e dunque equazioni ridotte

$$\begin{cases} x=2z+2q+p \\ y=z+q \end{cases}$$

Per determinare p e q imponiamo la complanarità con le rette s e t. Equazioni ridotte per s sono

$$\begin{cases} x=-2z+1 \\ y=z+3 \end{cases},$$

e quindi la condizione di complanarità tra $\tilde{r}$ e s è

$$\det\begin{vmatrix} 4 & 2q+p-1 \\ 0 & q-3 \end{vmatrix} = 0.$$

ovvero

$$q=3$$

Equazioni ridotte per t sono

$$\begin{cases} x=z+2 \\ y=-z \end{cases},$$

dunque la condizione di complanarità tra $\tilde{r}$ e t è

$$\det\begin{vmatrix} 1 & 2q+p-2 \\ 2 & q \end{vmatrix} = 0.$$

ovvero

$$-2p-3q=-4$$

Otteniamo così il sistema lineare

$$\begin{cases} q=3 \\ -2p-3q=-4 \end{cases}$$

la cui soluzione è $(p,q) = (-\frac{5}{2}, 3)$; la retta $\tilde{r}$ ha pertanto equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - 2y = -\frac{5}{2} \\ y - z = 3 \end{cases}$$

Esercizio 10. Decidere se le due rette:

$$\begin{cases} x + 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 2x + y - 2z + 6 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

sono complanari. In caso affermativo, stabilire se sono incidenti o parallele e determinare l'equazione del piano che le contiene.

Soluzione. Le due rette sono complanari ed incidenti. Per vederlo basta applicare i criterio trovati negli esercizi 6 e 7. Si ha infatti

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

in quanto le ultime due colonne sono linearmente dipendenti. Questo ci dice che le due rette sono complanari. Adesso possiamo stabilire se sono parellele, incidenti o coincidenti semplicemente calcolando il rango della matrice dei coefficienti e della matrice completa. Si ha

$$rg \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = rg \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = rg \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} rg \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3.$$

La matrice dei coefficienti ha rango 3; di conseguenza anche la matrice completa ha rango 3 e le due rette sono incidenti in un punto (da Rouché-Capelli segue che l'intersezione delle due rette è non vuota e ha dimensione zero). Un piano che le contiene entrambe si ottiene fissando un punto Q su una retta, ad esempio la seconda, e facendo passare per questo punto il generico piano per la prima retta. In formule: il generico piano per le prima retta è $\lambda(x+1) + \mu(z-2) = 0$. Un punto sulla seconda è : $(-5/2, 1, 1)$; quindi $\lambda = 2$ $\mu = -3$ (a meno di un fattore scalare) e si ha l'equazione $2x - 3z + 8 = 0$.