**Algebra Lineare. a.a. 2004-05. Gruppo A-H. Prof. P. Piazza**
**Compito pomeridiano del 18/10/04**

**Esercizio 1.** Utilizzando il metodo di Gauss, risolvere il seguente sistema lineare quadrato:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y + 4z = 2 \\ 3x - 3y + z = 1 \end{cases}$$

*Soluzione.* La matrice associata al sistema è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

L'elemento di posto $(1, 1)$ è diverso da zero; in particolare è uguale ad 1. Possiamo utilizzare questo 1 per eliminare gli altri della prima colonna al di sotto della prima riga; eseguiamo cioè la seguente operazione sulle righe:

$$\text{prima riga} \to \text{prima riga}$$
$$\text{seconda riga} \to \text{seconda riga} - 2 \cdot \text{prima riga}$$
$$\text{terza riga} \to \text{terza riga} - 3 \cdot \text{prima riga}$$

Otteniamo così la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -9 & -8 & -2 \end{array}\right)$$

L'elemento di posto $(2, 2)$ è diverso da zero. Possiamo renderlo uguale ad 1 moltiplicando la seconda riga per $-1/3$, ottenendo cosi la matrice.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & -9 & -8 & -2 \end{array}\right)$$

Adesso utilizziamo luno nel posto $(2, 2)$ per eliminare gli elementi della seconda colonna al di sotto della seconda riga:

$$\text{prima riga} \to \text{prima riga}$$
$$\text{seconda riga} \to \text{seconda riga}$$
$$\text{terza riga} \to \text{terza riga} + 9 \cdot \text{prima riga}$$

Otteniamo la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

L'elemento di posto $(3, 3)$ è diverso da zero e lo possiamo rendere uguale ad uno moltiplicando la terza riga per $-1/2$. La matrice che si ottiene è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

A questo punto l'eliminazione "a scendere" è completata. I pivot sono tutti non nulli, e dunque possiamo già concludere che il sistema ammette un unica soluzione.

Per determinarla esplicitamente facciamo l'eliminazione "a salire": utilizziamo l'uno in posizione (3,3) per eliminare gli elementi della terza colonna al di sopra della terza riga:

$$\begin{aligned} \text{prima riga} &\to \text{prima riga} - 3 \cdot \text{terza riga} \\ \text{seconda riga} &\to \text{seconda riga} - 2/3 \cdot \text{terza riga} \\ \text{terza riga} &\to \text{terza riga} \end{aligned}$$

ottenendo così la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Adesso utilizziamo l'uno in posizione $(2,2)$ per eliminare gli elementi della seconda colonna al di sopra della seconda riga:

$$\begin{aligned} \text{prima riga} &\to \text{prima riga} - 2 \cdot \text{seconda riga} \\ \text{seconda riga} &\to \text{seconda riga} \\ \text{terza riga} &\to \text{terza riga} \end{aligned}$$

La matrice che otteniamo è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Abbiamo finito: quest'ultima matrice ritradotta in un sistema ci dice

$$\begin{cases} x = -2/3 \\ y = -2/3 \\ z = 1 \end{cases}$$

**Esercizio 2.** Utilizzando il metodo di Gauss, studiare al variare di $t$ ed $s$ in $\mathbb{R}$ le soluzioni di

$$\begin{cases} 3x + sy + z = 1 \\ x - y + sz = -2 \\ 4x - 3y - z = t \end{cases}$$

*Soluzione.* La matrice associata al sistema è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & s & 1 & 1 \\ 1 & -1 & s & -2 \\ 4 & -3 & -1 & t \end{array}\right)$$

Per ritardare il più possibile l'apparizione del parametro $s$ sui pivot, scambiamo la prima e la terza riga:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & -1 & t \\ 1 & -1 & s & -2 \\ 3 & s & 1 & 1 \end{array}\right)$$

A questo punto procediamo con l'usuale eliminzazione gaussiana:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & -1 & t \\ 1 & -1 & s & -2 \\ 3 & s & 1 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/4 & -1/4 & t/4 \\ 1 & -1 & s & -2 \\ 3 & s & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -3/4 & -1/4 & t/4 \\ 0 & -1/4 & s+1/4 & -2-t/4 \\ 0 & s+9/4 & 7/4 & 1-3t/4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -3/4 & -1/4 & t/4 \\ 0 & 1 & -(4s+1) & 8+t \\ 0 & 4s+9 & 7 & 4-3t \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -3/4 & -1/4 & t/4 \\ 0 & 1 & -(4s+1) & 8+t \\ 0 & 0 & 7+(4s+9)(4s+1) & 4-3t-(8+t)(4s+9) \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -3/4 & -1/4 & t/4 \\ 0 & 1 & -(4s+1) & 8+t \\ 0 & 0 & 2s^2+5s+2 & -\frac{1}{4}(st+3t+8s+17) \end{pmatrix}$$

Notiamo che l'ultimo pivot dipende da $s$. Il sistema avrà un comportamento diverso a seconda se quest'ultimo pivot sia diverso o uguale a zero. Risolvendo l'equazione

$$2s^2 + 5s + 2 = 0$$

troviamo

$$s_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4} = \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$$

Dunque, per $s \neq -2, 1/2$ tutti i pivot sono diversi da zero e il sistema ha un unica soluzione per ogni valore di $t$. Restano da esaminare i due casi speciali $s = -2$ ed $s = -1/2$. Per $s = -2$ la matrice del sistema diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & -3/4 & -1/4 & t/4 \\ 0 & 1 & 7 & 8+t \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}(t+1) \end{pmatrix}$$

Ne segue che per $t \neq -1$ il sistema è incompatibile, non ammette cioè alcuna soluzione. Per $t = -1$ la matrice del sistema diventa invece

$$\begin{pmatrix} 1 & -3/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'ultima riga corrisponde all'identità $0 = 0$. Quest'identità è verificata per ogni valore di $x, y, z$ quindi l'ultima equazione del sistema non porta con se alcuna informazione e può essere eliminata. Otteniamo così la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -3/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

e si vede che questo sistema ammette infinite soluzioni, dipendenti da un parametro. Ad esempio, se poniamo $z = \lambda$ e trattiamo le variabili $z$ come parametri, portandole dall'altra parte dell'uguale, la matrice del sistema si riscrive come

$$\begin{pmatrix} 1 & -3/4 & -1/4+\lambda/4 \\ 0 & 1 & 7-7\lambda \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5-5\lambda \\ 0 & 1 & 7-7\lambda \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{cases} x = 5 - 5\lambda \\ y = 7 - 7\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Il caso $s = -1/2$ si analizza in modo del tutto simile: la matrice del sistema diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & -3/4 & -1/4 & t/4 \\ 0 & 1 & 1 & 8+t \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8}(5t+26) \end{pmatrix}$$

Pertanto, per $t \neq -26/5$ il sistema è incompatibile, mentre per $t = -26/5$ la matrice del sistema diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/4 & -1/4 & -13/10 \\ 0 & 1 & 1 & 14/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

e il sistema ammatte infinite soluzioni dipendenti da un parametro. Riassumendo la nostra analisi:

| **Parametri** | **Soluzioni** |
|---|---|
| $s \neq -2, -1/2$ | un'unica soluzione, per ogni $t$ fissato |
| $s = -2, t \neq -1$ | nessuna soluzione |
| $s = -2, t = -1$ | infinite soluzioni, dipendenti da un parametro |
| $s = -1/2, t \neq -26/5$ | nessuna soluzione |
| $s = -1/2, t = -26/5$ | infinite soluzioni, dipendenti da un parametro |