Algebra Lineare. a.a. 2004-05

Soluzioni dell'esame e dell'esonero del 18 Gennaio 2005

Esercizio 1. Verificare che l'applicazione lineare $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 10 \end{vmatrix};$$

è diagonalizzabile; determinare esplicitamente una base di autovettori. Determinare la matrice associata a F_A in tale base di autovettori.

Soluzione. Il polinomio caratteristico di A è

$$\begin{aligned} p_A(t) &= \det \begin{vmatrix} 2-t & 1 & 3 \\ 0 & 4-t & 0 \\ -4 & 2 & 10-t \end{vmatrix} = (4-t)\cdot\det\begin{vmatrix} 2-t & 3 \\ -4 & 10-t \end{vmatrix} \\ &= (4-t)(t^2-12t+32) \\ &= (t-4)^2(t-8) \end{aligned}$$

Dunque gli autovalori dell'operatore F_A sono $t = 4$ con molteplicità algebrica uguale a 2 e $t = 8$ con molteplicità algebrica uguale ad 1. Poichè, per ogni autovalore λ, vale

$$1 \leq \text{molt.geom.}(\lambda) \leq \text{molt.alg.}(\lambda)$$

abbiamo imemdiatamente che la molteplicità geometrica dell'autovalore $t = 8$ coincide con la sua molteplicità gemetrica. Resta da analizzare l'autovalore $t = 4$. Si ha

$$\text{molt.geom.}(4) = \dim V_4 = \dim\ker(F_A - 4\,\mathrm{Id}) = 3 - \mathrm{rg}(A - 4\,\mathrm{Id})$$

e resta da calcolare il rango della matrice $A - 4\,\mathrm{Id}$. Si ha

$$\mathrm{rg}\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \mathrm{rg}\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Dunque

$$\text{molt.geom.}(4) = 3 - 1 = 2 = \text{molt.alg.}(4)$$

L'applicazione F_A ha pertanto tutti autovalori reali e per ogni autovalore la molteplicità algebrica coincide con quella geometrica: l'applicazione F_A è diagonalizzabile.

Per determinare una base di autovettori dobbiamo semplicemente determinare una base per l'autospazio V_8 ed una base per l'autospazio V_4. Per quanto riguarda V_8, tale autospazio è lo spazio delle soluzioni del sistema

$$(A - 8\,\mathrm{Id}) \cdot \underline{x} = \underline{0}$$

ovvero, esplicitamente, del sistema

$$\begin{cases} -6x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ -4x_2 = 0 \\ -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo mediante l'eliminazione gaussiana troviamo

$$\left|\begin{array}{ccc|c} -6 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} -6 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

ovvero

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 2t \end{cases}$$

Una base di V_8 è pertanto costituita dal vettore $(1, 0, 2)$.

Procediamo in modo pefettamente analogo per determinare una base di V_4: tale autospazio è lo spazio delle soluzioni del sistema

$$(A - 4\,\mathrm{Id}) \cdot \underline{x} = \underline{0}$$

ovvero, esplicitamente, del sistema

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ -4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo mediante l'eliminazione gaussiana troviamo

$$\left|\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

ovvero

$$\begin{cases} x = s \\ y = 2s - 3t \\ z = t \end{cases}$$

Una base di V_4 è pertanto costituita dai vettori $\{(1, 2, 0), (0, -3, 1)\}$. La matrice associata a F_A in tale base di autovettori è, chiaramente, la matrice diagonale che ha sulla diagonale gli autovalori di F_A nell'ordine dato dall'ordine degli autovettori:

$$\left|\begin{array}{ccc} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right|$$

Esercizio 2. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$. Consideriamo le due seguenti basi

$$\mathcal{G} := \{\underline{g}_1 = (1, 1)\,, \underline{g}_2 = (-1, 1)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{H} := \{\underline{h}_1 = (0, 2)\,, \underline{h}_2 = (2, 0)\}$$

2.1 Determinare le matrici di cambiamento di base, da $\mathcal{G}$ a $\mathcal{H}$ e da $\mathcal{H}$ a $\mathcal{G}$.
2.2 Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$F(\underline{g}_1) = 2\underline{g}_1 - \underline{g}_2\,, \qquad F(\underline{g}_2) = \underline{g}_2\,.$$

Spiegare perché F è ben definita. Determinare la matrice associata a F nella base $\{\underline{h}_1, \underline{h}_2\}$.

Svolgimento. La matrice di cambiamento di base da $\mathcal{H}$ a $\mathcal{G}$ è la matrice $M^{\mathcal{H}}_{\mathcal{G}}(\mathrm{Id})$ che ha per colonne le coordinate dei vetttori della base $\mathcal{G}$ rispetto alla base $\mathcal{H}$. Per calcolarla osserviamo che vale

$$M^{\mathcal{H}}_{\mathcal{G}}(\mathrm{Id}) = M^{\mathcal{H}}_{\text{can.}}(\mathrm{Id}) \cdot M^{\text{can.}}_{\mathcal{G}}(\mathrm{Id}) = (M^{\text{can.}}_{\mathcal{H}}(\mathrm{Id}))^{-1} \cdot M^{\text{can.}}_{\mathcal{G}}(\mathrm{Id})$$

e dunque

$$M^{\mathcal{H}}_{\mathcal{G}}(\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix}$$

Ed in effetti si ha

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

La matrice di cambiamento di base dalla base $\mathcal{G}$ alla base $\mathcal{H}$ è

$$M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}}(\mathrm{Id}) = (M^{\mathcal{H}}_{\mathcal{G}}(\mathrm{Id}))^{-1} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Notiamo che alcuni autori usano chiamano matrice del cambiamento di base da $\mathcal{H}$ a $\mathcal{G}$ quella che noi chiamiamo matrice del cambiamento di base da $\mathcal{G}$ a $\mathcal{H}$ e viceversa. Alla fine, comunque, al coppia delle due matrici di cambiamento di base è la stessa qualunque definizione si scelga.

L'applicazione lineare $F\colon R^2 \to \mathbb{R}^2$ è ben definita perchè si sono dati i suoi valori su una base di $\mathbb{R}^2$. La matrice che rappresenta F rispetto alla base $\mathcal{G}$ è

$$M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(F) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Dunque la matrice che rappresenta F rispetto alla base $\mathcal{H}$ è

$$\begin{aligned} M^{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}}(F) &= M^{\mathcal{H}}_{\mathcal{G}}(\mathrm{Id}) \cdot M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(F) \cdot M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}}(\mathrm{Id}) \\ &= \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Esercizio 3. Spazio euclideo $\mathcal{E}^3$ con riferimento $RC(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ fissato e coordinate associate (x, y, z). Determinare la distanza fra il punto $P = (1, 2, -1)$ e la retta di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x - y + 3z + 6 = 0 \\ x + y + 5z = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Indicata con r la retta dat, basterà determinare il piano π ortogonale ad r e passante per il punto P. Detta H l'intersezione tra π ed r, la distanza $d(P, r)$ è semplicemente la distanza $d(P, H)$. Iniziamo col determinare un vettore direttore per r. Mediante eliminazione gaussiana, dal sistema omogeneo associato al sistema che definisce r, otteniamo

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

ovvero

$$\begin{cases} x = -4t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

Un vettore direttore per r è pertanto il vettore $(-4,-1,1)$ Ne segue che il fascio dei piani ortogonali ad r è costituito dai piani della forma

$$-4x - y + z = d$$

Per determinare d imponiamo il passaggio per P, ottenendo $-4-2-1=d$, ovvero il piano cercato è $4x+y-z=7$. per determinare l'intersezione tra questo piano e la retta r basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} x - y + 3z = -6 \\ x + y + 5z = 0 \\ 4x + y - z = 7 \end{cases}$$

Mediante eliminazione gaussiana troviamo

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -13 & 31 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -18 & 16 \end{array}\right|$$

$$\mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -8/9 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -10/3 \\ 0 & 1 & 0 & 35/9 \\ 0 & 0 & 1 & -8/9 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5/9 \\ 0 & 1 & 0 & 35/9 \\ 0 & 0 & 1 & -8/9 \end{array}\right|$$

Il punto $H = \pi \cap r$ ha dunque coordinate $(5/9, 35/9, -8/9)$. La distanza tra il punto P e la retta r è pertanto

$$\begin{aligned} d(P,r) &= ||P - H|| = ||(4/9, -17/9, -1/9)|| \\ &== \frac{1}{9}||(4,-17,-1)|| = \frac{1}{9}\sqrt{16+289+1} = \frac{1}{3}\sqrt{34} \end{aligned}$$

Esercizio 4. Spazio affine $\mathcal{A}^3$ con riferimento affine $RA(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ fissato e coordinate associate (x,y,z). Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per la retta di equazione parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

e parallelo alla retta di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x - y + 3z + 6 = 0 \\ x + y + 5z = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Cominciamo col determinare equazioni cartesiane per la retta data. Mediante eliminazione gaussiana troviamo

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & x-1 \\ -1 & y \\ 2 & z-2 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{cc} 1 & x-1 \\ 0 & x+y-1 \\ 0 & z-2x \end{array}\right|$$

Il fascio di piani contenenti la retta data è pertanto il fascio dei piani di equazione

$$\alpha(x+y-1) + \beta(2x-z) = 0$$

ovvero di equazione

$$\pi : (\alpha + 2\beta)x + \alpha y - \beta z - \alpha = 0.$$

Questo piano è parallelo alla retta r di equazione

$$\begin{cases} x - y + 3z + 6 = 0 \\ x + y + 5z = 0 \end{cases}$$

se e solo se la direzione di π contiene la direzione di r, ovvero se e solo se le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x - y + 3z + 6 = 0 \\ x + y + 5z = 0 \\ (\alpha + 2\beta)x + \alpha y - \beta z = 0 \end{cases}$$

sono uno spazio di dimensione 1. Questo equivale a chiedere che

$$\det \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ \alpha + 2\beta & \alpha & -\beta \end{vmatrix} = 0$$

Si ha

$$\det \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ \alpha + 2\beta & \alpha & -\beta \end{vmatrix} = -8(\alpha + 2\beta) - 2\alpha - 2\beta = -10\alpha - 18\beta$$

Dunque la condizione di parallelismo è $5\alpha + 9\beta = 0$. La soluzione di quest'equazione, unica a meno di un fattore scalare, è $(\alpha, \beta) = (9, -5)$; il piano cercato è pertanto il piano di equazione

$$-x + 9y + 5z - 9 = 0$$

Esercizio 5 dell'esame. Studiare, al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, le soluzioni del

sistema

$$\begin{cases} t\,x + y + z = 1 \\ x + t\,y + z = 2 - t \\ x + y + t\,z = t \end{cases}$$

(non si chiede di determinare esplicitamente le soluzioni del sistema).

Soluzione. Utilizziamo il teorema di Rouché-Capelli. La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A_t := \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix}$$

Si tratta di una matrice quadrat 3×3. Come tale, avrà rango uguale a 3 se e solo se il suo determinante è diverso da zero. Calcoliamo

$$\det \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = t(t^2 - 1) - (t - 1) + (1 - t) = (t - 1)^2(t + 2)$$

Dunque, per $t \neq -2, 1$ il rango della matrice dei coefficienti è uguale a 3. D'altronde la matrice completa è una matrice 3×4 e il suo rango è quindi al più 3. Dal fatto che il rango della matrice completa è sicuramente maggiore o uguale a quello della matrice dei coefficienti ricaviamo che i due ranghi sono uguali 9ed uguali a 3) per $t \neq -2, 1$. Ne segue che, se $t \neq -2, 1$ il sistema ammette un'unica soluzione.

Restano da esaminare i casi $t = -2$ e $t = 1$. Mediante eliminazione gaussiana troviamo, nel primo caso

$$\left|\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right|$$

$$\mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right|$$

Si tratta di un sistema incompatibile: per $t = -2$ il sistema dato non ha soluzioni. Nel secondo caso $(t = 1)$ troviamo invece

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Sia la matrice dei coefficienti che la matrice completa hanno rango 1: il sistema per $t = 1$ ammette ifinite soluzioni dopendenti linearmente da due parametri (lo spazio delle soluzioni è un piano affine).

Esercizio 5 dell'esonero.

Sia $M_{22}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici due per due a coefficienti reali. Sia F l'applicazione lineare che porta una matrice A in $\frac{A+A^T}{2}$. Calcolare autovalori ed autovettori di F.

Soluzione. L'applicazione F agisce su una matrice 2×2 nel seguente modo:

$$F(\left|\begin{array}{cc} x & y \\ z & w \end{array}\right|) = \frac{1}{2}\left(\left|\begin{array}{cc} x & y \\ z & w \end{array}\right| + \left|\begin{array}{cc} x & z \\ y & w \end{array}\right|\right) = \left|\begin{array}{cc} x & \frac{1}{2}(y+z) \\ \frac{1}{2}(y+z) & w \end{array}\right|$$

La matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica di $M_{22}(\mathbb{R})$ è pertanto

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

Ne segue che il polinomio caratteristico di F è

$$p_F(t) = \det \left|\begin{array}{cccc} 1-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2-t & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t \end{array}\right| = t(t-1)^3$$

L'applicazione F ha dunque autovalori $t = 1$ con molteplicità algebrica 3, e $t = 0$ con molteplicità algebrica 1. E' semplice accorgersi che una base dell'1-autospazio di F è costituita dalle tre matrici

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right|; \quad \left|\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right|; \quad \left|\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right|$$

e che una base dello 0-autospazio di F è costituita dalla matrice

$$\left|\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}\right|$$

In particolare l'applicazione F è diagonalizzabile.

Esercizio 6. Dimostrare che lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ è somma diretta di

$$U := \{(x, y, z) : x - z = 0\} \quad \text{e} \quad W := \mathrm{Span}\{(1, 1, 0)\}$$

Soluzione. Lo spazio U è uno sottospazio vettoriale di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$. E' immediato osservare che i vettori $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ sono una base di U. Ne segue che i tre vettori $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ e $(1, 1, 0)$ sono un sistema di generatori per il sottospazio $U + W \subseteq \mathbb{R}^3$. Mediante eliminazione gaussiana ci si rende facilmente conto che questi tre vettori sono linearmente indipendenti, dunque formano una base di $\mathbb{R}^3$. Da questo segue che $U + W = \mathbb{R}^3$. Resta da dimostrare che la somma è diretta, ovvero che $U \cap W = \{0\}$. Per dimostrarlo usiamo la formula di Grassmann:

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 2 + 1 - 3 = 0.$$