ISTITUZIONI DI MATEMATICHE
Corso di Laurea in Scienze Ambientali - A.A.2003-2004

Soluzione dei compiti assegnati per il periodo 16/10/03 - 21/10/03

Esercizio 1. *Determinare le soluzioni dell'equazione* $x = 4 - 3|x|$.
Soluzione. Per definizione $|x| = x$ se $x \geq 0$ e $|x| = -x$ se $x < 0$. Ne segue che l'equazione con il modulo può essere riscritta come segue :

$$x = 4 - 3x \text{ se } x \geq 0\,, \quad x = 4 + 3x \text{ se } x < 0$$

La prima equazione ha soluzione $x = 1$ che è una soluzione accettabile dato che $1 > 0$.
La seconda equazione ha soluzione $x = -2$ che è anche accettabile dato che $-2 < 0$.
Conclusione: le soluzioni dell'equazione sono $x = 1$, $x = -2$.

Esercizio 2. *Determinare per quali* $x \in \mathbb{R}$ *è verificata la disequazione* $|x^2+3x-4| < 2$.
Soluzione. Riscriviamo esplicitamente la disequazione utilizzando la definizione di modulo. Per definizione

$$|x^2 + 3x - 4| = \begin{cases} x^2 + 3x - 4 & \text{se } x^2 + 3x - 4 \geq 0 \\ -(x^2 + 3x - 4) & \text{se } x^2 + 3x - 4 < 0 \end{cases}$$

Quindi

$$|x^2 + 3x - 4| < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 4 \geq 0 \\ x^2 + 3x - 4 < 2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2 + 3x - 4 < 0 \\ -(x^2 + 3x - 4) < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 4 \geq 0 \\ x^2 + 3x - 4 < 2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2 + 3x - 4 < 0 \\ -x^2 - 3x + 4 < 2 \end{cases}$$

Cerchiamo le soluzioni del primo sistema che riscriviamo come

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 4 \geq 0 \\ x^2 + 3x - 6 < 0 \end{cases}$$

L'equazione $x^2 + 3x - 4 = 0$ ha il $\Delta = 25 > 0$; le sue soluzioni reali sono $x_2 = -4$, $x_1 = 1$. Dato che il coefficiente di x^2 è 1, quindi positivo, concludiamo che $x^2 + 3x - 4 \geq 0$ per $x \in (-\infty, -4] \cup [1, +\infty)$ (valori esterni).
L'equazione $x^2 + 3x - 6 = 0$ ha il $\Delta = 33 > 0$; le sue soluzioni reali sono

$$\frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

Dato che il coefficiente di x^2 è 1, quindi positivo, concludiamo che $x^2 + 3x - 6 < 0$ quando

$$x \in (\frac{-3 - \sqrt{33}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}) \quad \text{(valori interni)}\,.$$

Notare che utilizziamo qui le parentesi tonde, visto che vogliamo escludere gli estremi dell'intervallo. [1] Osserviamo poi che

$$\frac{-3-\sqrt{33}}{2} \simeq -4,3722\,, \qquad \frac{-3+\sqrt{33}}{2} \simeq 1,3722\,,$$

e quindi

$$\frac{-3-\sqrt{33}}{2} < -4 < 1 < \frac{-3+\sqrt{33}}{2}\,.$$

Concludiamo che queste due disequazioni sono *simultaneamente* soddisfatte per

$$x \in (\frac{-3-\sqrt{33}}{2}, -4] \cup [-1, \frac{-3+\sqrt{33}}{2})\,.$$

Queste sono quindi le soluzioni del primo sistema.
Passiamo al secondo sistema che riscriviamo nella forma:

$$\begin{cases} x^2+3x-4<0 \\ x^2+3x-2>0 \end{cases}$$

Per quanto visto sopra sappiamo che la prima disequazione $x^2+3x-4<0$ è soddisfatta da $x \in (-4,1)$ (ora dobbiamo prendere i valori interni ed escludere gli estremi). L'equazione $x^2+3x-2=0$ ha soluzioni

$$\frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

e quindi $x^2+3x-2>0$ per

$$x \in (-\infty, \frac{-3-\sqrt{17}}{2}) \cup (\frac{-3+\sqrt{17}}{2}, +\infty)\,.$$

Osserviamo che

$$\frac{-3-\sqrt{17}}{2} \simeq -3,5615\,, \qquad \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \simeq 0,5615$$

e quindi

$$-4 < \frac{-3-\sqrt{17}}{2} < \frac{-3+\sqrt{17}}{2} < 1$$

Le soluzioni simultanee delle due disequazioni, e cioè del secondo sistema, sono date da

$$x \in (-4, \frac{-3-\sqrt{17}}{2}) \cup (\frac{-3+\sqrt{17}}{2}, 1)\,.$$

Riassumendo: la disequazione $|x^2+3x-4|<2$ è soddisfatta da

$$x \in (\frac{-3-\sqrt{33}}{2}, -4] \cup [-1, \frac{-3+\sqrt{33}}{2}) \ \text{ oppure } \ x \in (-4, \frac{-3-\sqrt{17}}{2}) \cup (\frac{-3+\sqrt{17}}{2}, 1)$$

e quindi (pensateci un attimo)

$$x \in (\frac{-3-\sqrt{33}}{2}, \frac{-3-\sqrt{17}}{2})) \cup [-1, \frac{-3+\sqrt{33}}{2})\,.$$

La soluzione dell'esercizio è completa.

Esercizio 3. *Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ è verificata la disequazione:* $\frac{x^2+3x-4}{x-6} \geq 0$.

Soluzione. Una frazione è maggiore o uguale a zero quando numeratore e denominatore sono entrambi positivi oppure entrambi negativi (ma ovviamente il denominatore non si deve annullare) [2] Studiamo allora il segno del numeratore e del denominatore. Per il numeratore: la disequazione $x^2+3x-4 \geq 0$ l' abbiamo già risolta nell'Es. 2; sappiamo che essa è soddisfatta per $x \in (-\infty,-4] \cup [1,+\infty)$. Quindi il numeratore è ≥ 0 in $(-\infty,-4] \cup [1,+\infty)$ ed è invece <0 in $(-4,1)$. Il

[1] infatti in quei 2 punti l'espressione x^2+3x-6 si annulla; noi vogliamo invece che sia strettamente minore di zero.

[2] Quindi

$$\frac{x^2+3x-4}{x-6} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-4 \geq 0 \\ (x-6) > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2+3x-4 \leq 0 \\ (x-6) < 0 \end{cases}$$

denominatore è strettamente positivo per $x \in (6, \infty)$, si annulla per $x = 6$ (valore che va quindi escluso perché 0 non è ammesso al denominatore) ed è strettamente negativo per $x < 6$.
Conclusione: $\frac{x^2+3x-4}{x-6} \geq 0$ per $x \in [-4, 1] \cup (6, \infty)$.

Esercizio 4. *Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ è verificato il sistema*

$$\begin{cases} |x| > 2\,, \\ x^2 + 4x < 0\,. \end{cases}$$

Soluzione. Riscriviamo il sistema utilizzando la definizione di modulo. Il sistema è soddisfatto $\Leftrightarrow$:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x > 2 \\ x^2 + 4x < 0 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x < 0 \\ -x > 2 \\ x^2 + 4x < 0 \end{cases}$$

Consideriamo il primo sistema: l'unica disequazione da studiare veramente è la terza. Potete applicare il metodo noto e scoprite che è soddisfatta per $x \in (-4, 0)$ (valori interni). Ma allora il primo sistama non è soddisfatto da alcun x (è ovvio che non ci sono x che sono simultaneamente in $(-4, 0)$ (e quindi negativi) e in $(2, \infty)$. In altre parole *non* esiste $x \in \mathbb{R}$ che soddisfa *simultaneamente* le 3 disequazioni. Consideriamo il secondo sistema che è equivalente a

$$\begin{cases} x < 0 \\ x < -2 \\ x^2 + 4x < 0 \end{cases}$$

È chiaro che la soluzione è data da tutti gli $x \in (-4, -2)$. Conclusione: il sistema dato è soddisfatto da ogni $x \in (-4, -2)$.

Esercizio 6.*Determinare l'insieme di definizione (o dominio) delle seguenti funzioni:*

$$(i)\ f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad (ii)\ f(x) = \log_{10}\Big(1 - |\frac{x}{2-3x}|\Big).$$

Soluzione. La prima funzione è definita per tutti gli x tali che $\cos^2 x \neq 0$. Cerchiamo allora gli x tali che $\cos^2 x = 0$ ed escludiamoli dal dominio. In generale, per un numero reale a si ha che $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$. Basta allora cercare gli x tali che $\cos x = 0$. Sappiamo che questi sono i valori

$$\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Conclusione:

$$\mathrm{Dom}(\frac{1}{\cos^2 x}) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Passiamo alla seconda funzione; per definizione di logaritmo dobbiamo determinare gli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$1 - |\frac{x}{2-3x}| > 0\,,$$

e cioè tali che $|2-3x| > |x|$. L'ultima disequazione si esplicita in 4 sistemini; quindi $|2-3x| > |x| \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2-3x \geq 0 \\ 2-3x \geq x \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x < 0 \\ 2-3x \geq 0 \\ 2-3x \geq -x \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x < 0 \\ 2-3x < 0 \\ -(2-3x) \geq -x \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ 2-3x \geq 0 \\ 2-3x \geq x \end{cases}$$

dove utilizziamo *o* invece di *oppure*. Risolvendo si ottiene

$$|2-3x| > |x| \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty).$$

Riassumendo

$$\mathrm{Dom}\left(\log_{10}(1 - |\frac{x}{2-3x}|)\right) = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty).$$

Esercizio 5. Disegnare approssimativamente il grafico delle seguenti funzioni:

$$(i) \quad f(x) = 5x - 7, \qquad (ii) \quad f(x) = |2x + 4|,$$

$$(iii) \quad f(x) = -x^2 - 3x + 4, \qquad (iv) \quad f(x) = |3 + 2x - x^2|$$