Algebra Lineare. a.a. 2004-05. Gruppo A-H. Prof. P. Piazza
Soluzioni del compito pomeridiano del 13/12/2004

Esercizio 1. Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ fissata. Sia P l'applicazione lineare $P : V \longrightarrow V$ definita da

$$P\underline{e}_1 = 2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3\,, \qquad P\underline{e}_2 = \underline{g}_2 + \underline{g}_3\,, \qquad P\underline{e}_3 = \underline{g}_1 + \underline{g}_2 + \underline{g}_3\,, \tag{1}$$

con $\{\underline{g}_1 = (2,0,1)\,, \underline{g}_2 = (1,3,0)\,, \underline{g}_3 = (0,1,2)\}$. È subito visto che questi 3 vettori costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. Determinare la matrice associata a P in questa base (quindi, base di partenza = base di arrivo = base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2\, \underline{g}_3\}$).

Soluzione. La matrice associata a P rispetto alla base $\mathcal{G} = \{\underline{g}_1, \underline{g}_2\, \underline{g}_3\}$ ha come colonne le coordinate di $P(\underline{g}_1), P(\underline{g}_2)$ e $P(\underline{g}_3)$ rispetto alla base $\mathcal{G}$. Calcoliamo

$$\begin{aligned} P(\underline{g}_1) = P(2\underline{e}_1 + \underline{e}_3) = 2P(\underline{e}_1) + P(\underline{e}_3) &= 2(2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3) + (\underline{g}_1 + \underline{g}_2 + \underline{g}_3) \\ &= 5\underline{g}_1 + \underline{g}_2 - 3\underline{g}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\underline{g}_2) = P(\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2) = P(\underline{e}_1) + 3P(\underline{e}_2) &= (2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3) + 3(\underline{g}_2 + \underline{g}_3) \\ &= 2\underline{g}_1 + 3\underline{g}_2 + \underline{g}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\underline{g}_3) = P(\underline{e}_2 + 2\underline{e}_3) = P(\underline{e}_2) + 2P(\underline{e}_3) &= (\underline{g}_2 + \underline{g}_3) + 2(\underline{g}_1 + \underline{g}_2 + \underline{g}_3) \\ &= 2\underline{g}_1 + 3\underline{g}_2 + 3\underline{g}_3 \end{aligned}$$

La matrice che rappresenta P nella base $\mathcal{G}$ è pertanto

$$M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(P) = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Vediamo ora come era possibile risolvere l'esercizio con il linguaggio delle matrici. I dati del problema ci danno la matrice che rappresenta l'applicazione lineare P rispetto alla base canonica come base di partenza e alla base $\mathcal{G}$ come base di arrivo. Abbiamo

$$M^{\mathcal{G}}_{\text{can.}}(P) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

La matrice $M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(P)$ richiesta dall'esercizio si trova mediante un cambio di base:

$$M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(P) = M^{\mathcal{G}}_{\text{can.}}(P) \cdot M^{\text{can.}}_{\mathcal{G}}(\text{Id})$$

La matrice $M^{\text{can.}}_{\mathcal{G}}(\text{Id})$ è la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori della base $\mathcal{G}$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Dai dati dell'esercizio abbiamo pertanto

$$M^{\text{can.}}_{\mathcal{G}}(\text{Id}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Otteniamo così

$$M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(P) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Esercizio 2. Calcolare il determinante della matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

e determinare per quali valori di k la matrice è invertibile.
Soluzione. Sviluppando mediante la formula di Laplace rispetto alla prima riga troviamo

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Sviluppiamo adesso rispetto alla terza riga:

$$\det \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \det \begin{vmatrix} k & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \det \begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 2(k-1) - (-1-k) = 3k - 1.$$

Una matrice quadrata è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero, pertanto la matrice data è invertibile se e solo se $k \neq 1/3$.

Esercizio 3. Consideriamo le matrici

$$A = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & g & h \\ x & y & z & w \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} a & b & l & m \\ c & d & n & p \\ 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & z & w \end{vmatrix}.$$

Verificare che

$$\det A = \det B = \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix}$$

Soluzione. Sviluppiamo il determinante di A rispetto alla prima riga mediante la formula di Laplace:

$$\det A = \det \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & g & h \\ x & y & z & w \end{vmatrix} = a \det \begin{vmatrix} d & 0 & 0 \\ f & g & h \\ y & z & w \end{vmatrix} - b \det \begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ e & g & h \\ x & z & w \end{vmatrix}$$

Sviluppando ancora mediante la regola di Laplace rispetto alla prima riga troviamo

$$\det A = ad \det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix} - bc \det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix}$$

$$= (ad - bc) \det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix}$$

Il determinante di B si calcola in modo perfettamente analogo, sviluppando rispetto alla prima colonna.[1]

Esercizio 4. Verificare che la matrice dei coefficienti del seguente sistema è non singolare. Applicare il teorema di Cramer per determinare l'unica soluzione del sistema.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice dei coefficienti del sistema è

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Il determinante di questa matrice è uguale a 30, pertanto si tratta di una matrice non singolare. Ne segue che il sistema ammette un unica soluzione (x_1, x_2, x_3) data da

$$x_1 = \frac{\det \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{36}{30} = \frac{6}{5};$$

$$x_2 = \frac{\det \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{30} = -\frac{1}{5};$$

$$x_3 = \frac{\det \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5};$$

---

[1] Osserviamo che vale più in generale la seguente proposizione : sia $N \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ e supponiamo che

$$N = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix}$$

con $A \in M_{k,k}(\mathbb{R})$, $C \in M_{(n-k),(n-k)}(\mathbb{R})$, $B \in M_{k,(n-k)}(\mathbb{R})$, con $k < n$. Allora

$$\det N = \det A \cdot \det C\,.$$

La dimostrazione non è difficile (utilizza l'induzione su k); questo caso generale era uno degli esercizi assegnati per il fine settimana del 12/12/04 (esercizio 9.10 p. 198).

Esercizio per casa.

Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Sia π un sottospazio vettoriale di dimensione 2, cioè un piano, ed r una retta non contenuta in π. Si ha $V = r \oplus \pi$. Abbiamo definito due applicazioni lineari: $P_1 : V \to V$, la proiezione su r lungo π e $P_2 : V \to V$, la proiezione su π lungo r.

Vi ricordo che P_1 e P_2 sono definite come segue: se $\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$ con $\underline{v}_1 \in r$ e $\underline{v}_2 \in \pi$ allora

$$P_1(\underline{v}) = \underline{v}_1\,, \quad P_2(\underline{v}) = \underline{v}_2$$

Esercizio. Scrivere la matrice associata nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ alla proiezione P_2 sul piano π di equazione $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$ parallelamente alla retta $r = \mathbb{R}(1, 2, 1)$. Suggerimento: c'è una base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ per cui la matrice associata a P_2 è estremamente facile a scriversi. Qual è questa base ?[2] Una volta scritta la matrice associata a P_2 in questa "base speciale", l'esercizio può essere completato utilizzando la formula (8.5) pag. 164.

Soluzione. Consideriamo una base $\mathcal{G} = \{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ fatta nel seguente modo: $\underline{g}_1$ e $\underline{g}_2$ sono vettori di π, mentre $\underline{g}_3$ è un vettore di r. Allora, per definizione di proiezione su un piano di $\mathbb{R}^3$ parallelamente ad una retta data, si ha

$$P_2(\underline{g}_1) = \underline{g}_1;\ P_2(\underline{g}_2) = \underline{g}_2;\ P_2(\underline{g}_3) = 0.$$

Ne segue che la matrice che rappresenta la proiezione P_2 rispetto alla base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ scelta sia come base di partenza che di arrivo è la matrice

$$M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(P_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

La matrice $M^{\text{can.}}_{\text{can.}}(P_2)$ che rappresenta la proiezione P_2 nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ si ottiene a partire da $M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(P_2)$ con un cambio di base:

$$M^{\text{can.}}_{\text{can.}}(P_2) = M^{\text{can.}}_{\mathcal{G}}(\text{Id}) \cdot M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(P_2) \cdot M^{\mathcal{G}}_{\text{can.}}(\text{Id}) = M^{\text{can.}}_{\mathcal{G}}(\text{Id}) \cdot M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(P_2) \cdot (M^{\text{can.}}_{\mathcal{G}}(\text{Id}))^{-1},$$

dove $M^{\text{can.}}_{\mathcal{G}}(\text{Id})$ è la matrice del cambio di base dalla base $\mathcal{G}$ alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, ovvero è la matrice che ha per colonne le coordinate dei vettori $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ rispetto alla base canonica si $\mathbb{R}^3$. per determinare esplicitamente $M^{\text{can.}}_{\mathcal{G}}(Id)$ dobbiamo pertanto determinare esplicitamente una base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$. Come abbiamo detto, i vettori $\underline{g}_1$ e $\underline{g}_2$ devono formare una base di π. Li determiniamo pertanto risolvendo l'equazione che definisce π: da $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ricaviamo $x_1 = x_2 + x_3$, ovvero

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Una base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2\}$ per π è pertanto

$$\underline{g}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}; \qquad \underline{g}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

[2]Per rispondere a questa domanda interrogatevi su come agisce P_2 sui vettori del piano π e sui vettori della retta r.

Infine, $\underline{g}_3$ deve essere un vettore (non nullo) appartenente alla retta r. Dai dati del problema troviamo subito che una possibile scelta di $\underline{g}_3$ è

$$\underline{g}_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Con queste scelte di $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3$ troviamo

$$M^{\text{can.}}_{\text{can.}}(P_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{vmatrix}$$

ovvero, nelle coordinate x_1, x_2, x_3 di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base canonica, la proiezione P_2 è l'applicazione lineare

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_1 - x_3 \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \end{vmatrix}$$

Osserviamo che

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

come dev'essere.