Algebra Lineare. Gruppo I-Z. Prof. P. Piazza

Soluzioni del compito pomeridiano del 11/12/02

Soluzione esercizio 1. L'applicazione $F_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ è definita da una matrice non-singolare. Ne segue che F_A è iniettiva e suriettiva. Inoltre F_A ha 5 autovalori *distinti*: ne segue che esistono 5 autovettori linearmente indipendenti, ne segue che F_A è diagonalizzabile (esiste una base di autovettori).

Soluzione esercizio 2. Per definizione

$$F(1,1) = -2(1,1) = (-2,-2)\,, \qquad F(-1,0) = 3(-1,0) = (-3,0)\,.$$

F è allora univocamente determinata dalle condizioni date perché è lineare e perché è nota sui vettori $\underline{v}_1 = (1,1)$ e $\underline{v}_2 = (-1,0)$ che sono una base di $\mathbb{R}^2$. La matrice associata ad F nella base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Schematicamente:

$$A \text{ associata a } \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\} \quad \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}\,.$$

Vogliamo trovare

$$B \text{ associata a } \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\} \quad \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}\,.$$

Sia M la matrice che ha come colonne le coordinate della base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ rispetto alla base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$: quindi

$$\begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 \end{vmatrix} M$$

Sappiamo che

$$B = M^{-1} A M$$

Noi non conosciamo M ma conosciamo M^{-1} perché conosciamo M' tale che

$$\begin{vmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 \end{vmatrix} M'\,,$$

(infatti $M' = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$) e sappiamo che $M' = M^{-1}$, da cui

$$M = (M')^{-1} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right)^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

e quindi, in definitiva,

$$B = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \ldots .$$

La matrice B è ovviamente diagonalizzabile (questo era chiaro sin dal principio dato che B è la matrice associata ad un'applicazione diagonalizzabile).

Soluzione esercizio 3. Calcolando il polinomio caratteristico si scopre che A ammette gli autovalori reali $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ con molteplicità algebrica rispettivamente 2 e 2. Si ha poi

$$V_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \}\,, \quad V_0 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \}\,.$$

Questi autospazi hanno entrambi dimensione 2. Per il criterio di diagonalizzabilità [1] ne segue che A è diagonalizzabile. A è quindi coniugata alla matrice diagonale

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} ;$$

inoltre dato che

$$V_1 = \mathrm{Span}((1,0,0,1),(0,1,1,0)) , \quad V_0 = \mathrm{Span}((1,0,0,-1),(0,1,-1,0)) ,$$

vediamo che una matrice diagonalizzante è data da

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Ne segue che che $\Delta = M^{-1}AM$ e quindi che

$$A^{1224} = M\Delta^{1224}M^{-1} = \dots$$

Soluzione esercizio 4. Il polinomio caratteristico di A è $\lambda^2 + 2\lambda + 2$ che ha radici $\lambda_1 = -1 + i$ e $\lambda_2 = -1 - i$. Ne segue che A non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. D'altra parte A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ dato che ammette 2 autovalori *distinti.* La matrice diagonale alla quale A è coniugata è la matrice

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1+i & 0 \\ 0 & -1-i \end{vmatrix}$$

La matrice diagonalizzante M è la matrice che ha come colonne le coordinate degli autovettori di $F_A^{\mathbb{C}}$. Dato che $V_{-1+1} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 - iz_2 = 0\} = \mathbb{C}(1, -i)$ e $V_{-1-i} = \mathbb{C}(1, i)$ concludiamo che una matrice diagonalizzante per A è

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{vmatrix}$$

Soluzione esercizio 5. Due matrici coniugate hanno lo stesso polinomio caratteristico; ciò implica, ovviamente, che se due matrici hanno polinomi caratteristici diversi, allora non sono coniugate. Ne segue, calcolando tali polinomi caratteristici, che le uniche matrici che possono essere coniugate sono A_2 e A_4. Si ha $P_{A_2}(\lambda) = P_{A_4}(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$ che ha radici *distinte* $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Quindi A_2 è coniugata alla matrice diagonale Δ con

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} ;$$

A_4 è anche coniugata alla matrice Δ e quindi (con piccolo ragionamento) A_2 è coniugata a A_4, come volevasi.

[1] (i) radici del pol. carat. reali; (ii) molteplicità algebrica=molteplicità geometrica.