Algebra Lineare. a.a. 2004-05. Gruppo A-H. Prof. P. Piazza

Soluzioni del compito pomeridiano del 10/1/05

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}^2$ il piano vettoriale euclideo con base ortonormale standard $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$. Determinare le equazioni cartesiane della retta vettoriale [1] ortogonale alla retta vettoriale di equazione cartesiana

$$x + 2y = 0\,.$$

Soluzione. La retta vettoriale di equazione cartesiana

$$x + 2y = 0$$

ha come generatore $(2, -1)$. Un vettore di coordinate incognite (x, y) è ortogonale a $(2, -1)$ sse $\langle (x, y), (2, -1) \rangle = 0$ cioè se e solo se $2x - y = 0$. Quindi: l'equazione cartesiana della retta cercata è $2x - y = 0$.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^3$ con la base ortonormale canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$.
(i) Determinare le coordinate dei vettori $\underline{v} \in V$ che sono complanari a $\underline{f} = (1, -2, 0)$ e $\underline{g} = (2, 0, 1)$, hanno lunghezza uguale a $\sqrt{6}$ e sono ortogonali a $(3, -1, -1)$.
(ii) Detto $\underline{v}_1$ quello, tra i vettori determinati nel punto (i) dell'esercizio, che forma un angolo ottuso con $\underline{e}_2$, determinare le coordinate del vettore proiezione ortogonale di $\underline{v}_1$ sulla retta generata da $\underline{f}$.

Soluzione.
Cerchiamo i vettori di coordinate incognite (x_1, x_2, x_3) che
(i) sono combinazioni lineari di $\underline{f}$, $\underline{g}$.
(ii) sono tali che $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6$
(iii) sono tali che $\langle (x_1, x_2, x_3), (3, -1, -1) \rangle = 0$, cioè tali che $3x_1 - x_2 - x_3 = 0$.
Per quel che concerne (i), il vettore (x_1, x_2, x_3) deve essere della forma $\alpha \underline{f} + \beta \underline{g}$, ovvero

$$(x_1, x_2, x_3) = (\alpha + 2\beta, -2\alpha, \beta).$$

Imponendo la condizione (iii) troviamo

$$\langle (\alpha + 2\beta, -2\alpha, \beta), (3, -1, -1) \rangle = 0,$$

ovvero

$$\beta = -\alpha$$

da cui

$$(x_1, x_2, x_3) = (-\alpha, -2\alpha, -\alpha)$$

Imponiamo adesso la condizione (ii):

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \alpha^2(1 + 4 + 1) = 6$$

Ne segue $\alpha = \pm 1$ e dunque troviamo le seguenti due soluzioni al problema:

$$\underline{v} = (-1, -2, -1) \qquad \text{e} \qquad \underline{w} = (1, 2, 1).$$

[1] per retta vettoriale intendiamo un *sottospazio vettoriale* di dimensione 1 in $\mathbb{R}^2$

Per (ii) : per decidere quale di questi due vettori è $\underline{v}_1$ basta osservare che due vettori formano un angolo ottuso se e solo se il coseno dell'angolo che formano è è negativo, ovvero se e solo se il prodotto scalare dei due vettori è negativo. Si ha

$$\langle \underline{v}, \underline{e}_2 \rangle = -2 \qquad \text{e} \qquad \langle \underline{w}, \underline{e}_2 \rangle = 2$$

Dunque $\underline{v}_1 = \underline{v} = (-1, -2, -1)$. Infine, la proiezione ortogonale di $\underline{v}_1$ su $\underline{f}$, che è data da

$$\pi_{\underline{f}}(\underline{v}_1) = \langle \underline{v}_1, \frac{\underline{f}}{\|\underline{f}\|} \rangle \frac{\underline{f}}{\|\underline{f}\|} = \langle \underline{v}_1, \underline{f} \rangle \frac{\underline{f}}{\|\underline{f}\|^2} = (\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, 0)$$

Esercizio 3. Determinare l'equazione cartesiana del piano vettoriale [2] π ortogonale alla retta vettoriale r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} .$$

Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3\}$, con $\underline{f}_1 \in r$ e $\underline{f}_2, \underline{f}_3 \in \pi$.

Soluzione. Un vettore generatore della retta r è dato da $(1,1,0)$. Un vettore di coordinate incognite (x,y,z) è ortogonale alla retta $\mathbb{R}(1,1,0)$ sse $\langle (x,y,z), (1,1,0) \rangle = 0$ cioè sse $x + y = 0$. Questa è l'equazione cartesiana del piano cercato. Per determinare la base $\{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3\}$ scegliamo $\underline{f}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$. Fissiamo poi un vettore $\underline{g}_2$ a caso in π; ad esempio $\underline{g}_2 = (1, -1, 0)$. Il versore associato, $\underline{f}_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$, è allora un vettore in π di lunghezza unitaria. Rimane da determinare $\underline{f}_3$. Deve soddisfare le seguenti condizioni:

$$\langle \underline{f}_3, \underline{f}_3 \rangle = 1 ; \quad \underline{f}_3 \in \pi ; \quad \langle \underline{f}_3, \underline{f}_2 \rangle = 0 .$$

Per determinare un tale vettore $\underline{f}_3$ osserviamo che dall'equazione cartesiana di π segue che $\underline{f}_3$ deve essere della forma $(\alpha, -\alpha, \beta)$. Il suo prodotto scalare con $\underline{f}_2$ è allora

$$0 = \langle \underline{f}_3, \underline{f}_2 \rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\alpha$$

Otteniamo così $\alpha = 0$ e dunque $\underline{f}_3 = (0, 0, \beta)$. Infine imponendo $\langle \underline{f}_3, \underline{f}_3 \rangle = 1$ troviamo $\beta = \pm 1$. Possiamo ad esempio scegliere $\underline{f}_3 = (0, 0, 1)$. Un altro modo di procedere é prendere una base $\{\underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ a caso in π e poi ortonormalizzarla *à la* Gram-Schmidt. Un altro metodo ancora è il seguente: poichè $\underline{f}_1$ e $\underline{f}_2$ sono due vettori ortonormali di $\mathbb{R}^3$, un vettore che completa $\{\underline{f}_1, \underline{f}_2\}$ ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ sarà necessariamente un vettore di π ortogonale a $\underline{f}_2$ e di lunghezza unitaria. Possiamo perciò prendere

$$\underline{f}_3 = \pm(\underline{f}_1 \wedge \underline{f}_2) = \pm \det \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \underline{e}_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \underline{e}_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, \pm 1)$$

Esercizio 4. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare canonico e coordinate (x,y,z), si dia un'equazione cartesiana del piano che contiene il punto $P(1,2,3)$ ed

[2] per piano vettoriale intendiamo un *sottospazio vettoriale* di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$

è perpendicolare alla retta r definita dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ 2x+y+3z+1=0. \end{cases}$$

Soluzione. Sia $ax+by+cz+d=0$ l'equazione del piano cercato. Sappiamo che i coefficienti (a,b,c) sono proporzionali ai parametri direttori della retta ortogonale, che è data nel testo dell'esercizio. I parametri direttori di r sono $(4,-5,-1)$ e quindi il nostro piano va cercato fra i piani del fascio improprio:

$$4x-5y-z+d=0$$

Imponendo il passaggio per il punto P di coordinate $(1,2,3)$ si trova $d=9$. L'equazione cercata è quindi

$$4x-5y-z+9=0\,.$$

Esercizi per casa

Esercizio 1. *Utilizzando il prodotto vettoriale* determinare le coordinate dei vettori $\underline{v}$ che hanno lunghezza uguale a 2 e sono ortogonali sia a $\underline{f}=(1,-1,2)$ che a $\underline{g}=(0,1,-1)$.

Soluzione. Il vettore $\underline{f}\wedge\underline{g}$ è un vettore che è ortogonale sia ad $\underline{f}$ che a $\underline{g}$. Dalla formula per il prodotto vettoriale otteniamo immediatamente le coordinate di $\underline{f}\wedge\underline{g}$ che sono $(-1,1,1)$. Il sottospazio dei vettori ortogonali a due vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 1. Dunque i vettori cercati devono essere della forma $\underline{v}=\lambda(-1,1,1)$, per qualche $\lambda\in\mathbb{R}$. Basta allora determinare i λ tali che $||(-\lambda,\lambda,\lambda)||=2$ e cioè tali che $(-\lambda)^2+(\lambda)^2+(\lambda)^2=4$. Si trova $3\lambda^2=4$, e dunque $\lambda=\pm 2/\sqrt{3}$. Conclusione: i vettori cercati sono $\{(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}),(\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}})\}$.

Esercizio 2. Avete visto l'operazione di prodotto vettoriale di due vettori. In questo esercizio dovete utilizzare quello che avete imparato sul prodotto vettoriale ma anche molte delle nozioni viste durante questo corso di algebra lineare.
Sia $\underline{u}$ il vettore di coordinate $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$.

(2.1) Determinare l'equazione cartesiana del sottospazio costituito dai vettori di $\mathbb{R}^3$ che sono ortogonali a $\underline{u}$.[3]

Si consideri l'applicazione $T:V\longrightarrow V$ che associa a $\underline{v}$ il vettore $\underline{u}\wedge\underline{v}$, con $\wedge$ uguale al prodotto vettoriale:

$$T\underline{v}=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})\wedge\underline{v}.$$

Dalle proprietà del prodotto vettoriale sappiamo che T è lineare.

(2.1bis) Perché possiamo affermare, senza fare i conti, che $\dim\operatorname{Ker}T\geq 1$? Perché possiamo affermare, senza fare i conti che $\dim\operatorname{Im}T\geq 2$? (Suggerimento per la seconda domanda: prendere due vettori fra loro ortogonali nel piano vettoriale ortogonale a $\underline{u}=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$.) Concluderne che $\dim\operatorname{Ker}T=1$ e $\dim\operatorname{Im}T=2$.

(2.2) Scrivere equazioni cartesiane per il nucleo $\operatorname{Ker}(T)$ e per per l'immagine $\operatorname{Im}T$. Dare una base ortonormale per questi sottospazi.

[3]Brevemente: determinare l'equazione cartesiana del piano vettoriale ortogonale a $\underline{u}$.

(2.3) Scrivere la matrice associata a T nella base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$.

(2.4) (*Facoltativo*) Determinare l'immagine tramite T della retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Verificare che il piano π di equazione cartesiana $2x + 2y - 3z = 0$ ha immagine tramite T uguale ad un piano e si determini l'equazione cartesiana di tale piano. Verificate poi che il piano σ di equazione cartesiana $2x + y - 3z = 0$ ha invece immagine tramite T uguale ad una retta. Come si spiega questa differenza?

Soluzione.
(2.1) Il vettore $\underline{v}$ di coordinate incognite (x, y, z) è ortogonale al vettore dato $\underline{u}$ sse $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 0$ cioè sse $1/\sqrt{3} \cdot x + 1/\sqrt{3} \cdot y + 1/\sqrt{3} \cdot z = 0$ cioè sse $x + y + z = 0$.
Ne segue che l'equazione cartesiana del piano vettoriale ortogonale a $\underline{u}$ è $x+y+z = 0$.

(2.1bis) Sicuramente $T(\underline{u}) = \underline{0}$; infatti $T(\underline{u}) = \underline{u} \wedge \underline{u}$ che è uguale al vettore nullo per definizione di prodotto vettoriale. Ne segue che $\underline{u} \in \operatorname{Ker} T$ e quindi $\dim \operatorname{Ker} T \geq 1$. Per mostrare che $\dim \operatorname{Im} T \geq 2$, seguimao il suggerimento e consideriamo due vettori nel piano vettoriale τ, ortogonale a $\underline{u}$; siano essi $\underline{f}_1$ e $\underline{f}_2$. Scegliamo questi due vettori *ortonormali.* Allora $\{\underline{u}, \underline{f}_1 \underline{f}_2\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ e dalla definizione di prodotto vettoriale segue immediatamente che $T(\underline{f}_1) = \underline{f}_2$ oppure $T(\underline{f}_1) = -\underline{f}_2$; analogamente, $T(\underline{f}_2) = \underline{f}_1$ oppure $T(\underline{f}_2) = -\underline{f}_1$ (quale segno prendere dipendende dall'orientazione della base $\{\underline{u}, \underline{f}_1 \underline{f}_2\}$). Ma allora l'immagine di T contiene sicuramente il piano vettoriale τ e quindi $\dim \operatorname{Im} T \geq 2$. A questo punto dalla formula

$$\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

otteniamo subito che deve essere necessariamente $\dim \operatorname{Ker} T = 1$ e $\dim \operatorname{Im} T = 2$; più precisamente $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Span}\{\underline{u}\}, \quad \operatorname{Im} T = \tau$.

(2.2) Nel punto precedente abbiamo mostrato $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Span}\{\underline{u}\}, \quad \operatorname{Im} T = \tau$. Ne segue che una base ortonormale di $\ker T$ è data dal vettore $\underline{u}$, mentre (essendo τ il piano di $\mathbb{R}^3$ ortogonale a $\underline{u}$) un'equazione cartesiana per $\operatorname{Im} T$ è stata determinata nel punto (2.1): si tratta dell'equazione $x+y+z = 0$. Una base ortonormale di $\operatorname{Im} T$ è, ad esempio, $\{(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})\}$. Infine rimangono da determinare equazioni cartesiane per la retta $\ker T$. Dato che si tratta della retta ortogonale al piano $\operatorname{Im} T$, e di questo abbiamo appena trovat una base, otteniamo subito le seguenti equazioni cartesiane per $\ker T$:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

(2.3) Basta calcolare le coordinate delle immagini dei vettori della base canonica. Utilizzando la formula per il prodotto vettoriale in coordinate otteniamo:
$T(\underline{e}_1) = (0, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$;
$T(\underline{e}_2) = (-1/\sqrt{3}, 0, 1/\sqrt{3}\underline{k})$;
$T(\underline{e}_3) = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 0)$.

La matrice cercata è, quindi :

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{vmatrix}.$$

(2.4)(*Facoltativo*) La retta vettoriale data è generata dal vettore $(1,-2,1)$. Quindi l'immagine di questa retta tramite T è data dal sottospazio generato dal vettore $T(1,-2,1)$ che è il vettore di coordinate

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{-3}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}.$$

Per trovare l'immagine di π basta selezionare una base di π e trasformarla. L'immagine di π tramite T sarà il sottospazio generato da questi vettori trasformati. Si trova un piano. Lo stesso procedimento si applica a σ ma l'immagine è una retta. La differenza fra questi due piani è che π ha intersezione banale con $\mathrm{Ker}(T)$ mentre σ contiene $\mathrm{Ker}(T)$. Questa è la ragione per cui $T(\pi)$ è un piano, mentre $T(\sigma)$ è una retta.

Esercizio 3. Determinare l'equazione cartesiana del piano π di $\mathbb{R}^3$ (dotato della struttura euclidea standard) passante per la retta s di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

ed ortogonale al piano σ di equazione $x - y - z = 3$.
Suggerimento: vi ricordo che due piani sono ortogonali se e solo se i 2 vettori ortogonali ai piani sono fra loro ortogonali.

Soluzione. Ricavando t e sostituendo possiamo passare da equazioni parametriche di s a sue equazioni cartesiane; ad esempio

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ 2x + z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Il fascio di piani per s ha equazioni

$$\lambda(2x - y - 2) + \mu(2x + z - 1) = 0,$$

al variare di $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$. Riscriviamo l'equazione del piano generico $\pi_{\lambda,\mu}$ per s come

$$(2\lambda + 2\mu)x - \lambda y + \mu z - 2\lambda - \mu = 0\,.$$

La direzione di questo piano è data dall'equazione cartesiana

$$(2\lambda + 2\mu)x - \lambda y + \mu z = 0\,,$$

dunque un vettore ortogonale alla direzione di $\pi_{\lambda,\mu}$ è il vettore di coordinate $(2\lambda + 2\mu, -\lambda, \mu)$. Un vettore ortogonale al piano σ è $(1,-1,-1)$. I due piani sono ortogonali sse i rispettivi vettori ortogonali sono fra loro perpendicolari, cioè sse

$$\langle (2\lambda + 2\mu, -\lambda, \mu), (1,-1,-1) \rangle = 0$$

da cui $3\lambda+\mu=0$. Scegliendo $\lambda=-1$, $\mu=3$ [4] otteniamo il piano $4x+y+3z-1=0$.

[4] la soluzione è unica a meno di un fattore $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ che poi può essere semplificato dall'equazione finale.